Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике
Решения задач

2022-2023 учебный год

В 4 и 5 классах олимпиада длилась 60 минут, в 6–8 классах — 90 минут, в 9–11 классах — 120 минут.

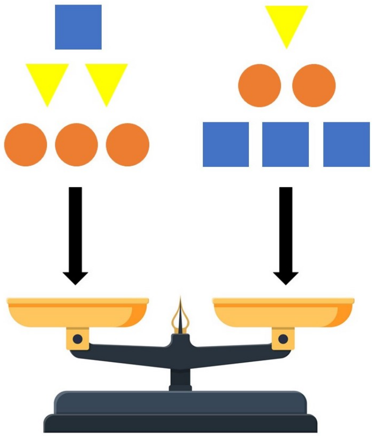
Для каждого номера задания участнику случайным образом выдавалась одна из версий задачи, подготовленных составителями. Таким образом у каждого школьника был свой вариант олимпиады. В разделе «Решения» для каждого номера приведена только одна версия задачи с решением, а в разделе «Ответы» приведены все версии задач с ответами.

Содержание

Решения

4 класс

Задача 4.1. Круглые гири весят 200 граммов, квадратные — 300 граммов, а треугольные — 150 граммов. 12 гирь положили на чашечные весы, как показано на рисунке. Какая чаша тяжелее и на сколько граммов?



Ответ: правая тяжелее на 250 граммов.

Решение. Вес левой чаши в граммах равен

$$1 \cdot 300 + 2 \cdot 150 + 3 \cdot 200 = 1200.$$

Вес правой чаши в граммах равен

$$1 \cdot 150 + 2 \cdot 200 + 3 \cdot 300 = 1450.$$

Таким образом, правая чаша весов тяжелее левой на 250 граммов. □

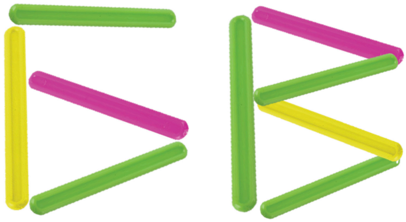
Задача 4.2. В 4«А» классе у каждого ребёнка есть не менее 11 одноклассников и не менее 13 одноклассниц. Какое наименьшее количество детей может учиться в этом классе?

Ответ: 26.

Решение. Нетрудно проверить, что класс, состоящий из 12 мальчиков и 14 девочек, удовлетворяет условию задачи. Теперь докажем, что меньше быть не может.

Ясно, что в классе есть и мальчики, и девочки. У каждого мальчика в классе не менее 11 одноклассников, поэтому всего мальчиков хотя бы 12. У каждой девочки в классе не менее 13 одноклассниц, поэтому всего девочек хотя бы 14. Таким образом, в классе учится хотя бы $12 + 14 = 26$ детей. □

Задача 4.3. У Саши было 47 палочек. Использовав их все, он сложил несколько букв «Б» и «В», изображённых на рисунке. Какое наибольшее количество букв «Б» могло получиться у Саши?



Ответ: 8.

Решение. Чтобы сложить букву «Б», нужно 4 палочки, а чтобы сложить букву «В», нужно 5 палочек.

- Хотя бы 12 букв «Б» Саша сложить не мог, так как для этого понадобилось бы не менее 48 палочек.
- Если бы Саша сложил 11 букв «Б», то у него осталось бы $47 - 11 \cdot 4 = 3$ палочки. А этого бы не хватило даже на одну букву «В».
- Если бы Саша сложил 10 букв «Б», то у него осталось бы $47 - 10 \cdot 4 = 7$ палочек. Можно было бы выложить одну букву «В», но остались бы лишние палочки.
- Если бы Саша сложил 9 букв «Б», то у него осталось бы $47 - 9 \cdot 4 = 11$ палочек. Можно было бы выложить две буквы «В», но осталась бы лишняя палочка.
- Если бы Саша сложил 8 букв «Б», то у него осталось бы $47 - 8 \cdot 4 = 15$ палочек. Этого как раз хватает на 3 буквы «В». □

Задача 4.4. Коты Леопольд, Гарфилд, Василий, Матильда и Том съели на кухне две котлеты, две сосиски и одну рыбу. Каждый из них съел что-то одно. Известно, что:

- Леопольд, Гарфилд и Том съели 3 разных блюда;
- Василий не ел котлету, а Леопольд не ел сосиску;
- Гарфилд и Матильда съели одно и то же.

Кому что досталось?

Ответ: Гарфилду и Матильде — котлеты, Василию и Тому — сосиски, Леопольду — рыба.

Решение. Гарфилд и Матильда съели одно и то же, значит, они съели либо по сосиске, либо по котлете.

Случай 1. Гарфилд и Матильда съели по сосиске.

По условию Василий не ел котлету, также он не ел сосиску (так как все сосиски съели Гарфилд и Матильда). Значит, Василий съел единственную рыбу.

Леопольду и Тому остаются котлеты, но это противоречит условию о том, что Леопольд, Гарфилд и Том съели 3 разных блюда.

Случай 2. Гарфилд и Матильда съели по котлете.

По условию Леопольд не ел сосиску, также он не ел котлету (так как все котлеты съели Гарфилд и Матильда). Значит, Леопольд съел единственную рыбу.

Василию и Тому остаются сосиски. Все условия задачи при этом выполняются. □

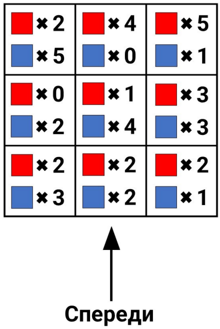
Задача 4.5. У мамы с папой есть двое детей: Коля и Таня. Папа старше мамы на 4 года. Коля тоже старше Тани на 4 года и вдвое младше папы. Сколько лет каждому из них, если суммарный возраст всех членов семьи составляет 130 лет?

Ответ: Тане 19 лет, Коле 23 года, маме 42 года, папе 46 лет.

Решение. Мысленно увеличим возраст мамы и Тани на 4 года. Тогда возраст у двух членов семьи будет равен возрасту папы, ещё у двух — половинке возраста папы. Тогда суммарный возраст всех членов семьи равен $130 + 4 + 4 = 138$ лет, и он должен быть равен утроенному возрасту папы. Следовательно, папе должно быть $138 : 3 = 46$ лет. Отсюда легко понять, что маме $46 - 4 = 42$ года, Коле $46 : 2 = 23$ года, а Тане $23 - 4 = 19$ лет. □

Задача 4.6. Женя взял доску 3×3 и на каждую клетку поставил столбик из синих и красных кубиков. Потом он зарисовал схему получившейся расстановки: подписал количество кубиков обоих цветов в каждом столбике (порядок кубиков неизвестен).

Какое наибольшее количество синих кубиков может увидеть Женя, если посмотрит на конструкцию спереди? (Например, если перед столбиком из 8 кубиков стоит столбик из 5, то будет видно все 5 кубиков ближнего столбика и только 3 верхних кубика дальнего столбика.)



Ответ: 12.

Решение. Поймём, какое наибольшее количество синих кубиков Женя может увидеть в каждом из трёх рядов: левом, среднем и правом.

Левый ряд. Первый столбик состоит из 5 кубиков (2 красных и 3 синих), поэтому он полностью загораживает второй столбик, а также 5 из 7 кубиков последнего столбика.

Таким образом, Женя видит все кубики первого столбика (среди них 3 синих), а также 2 кубика из последнего столбика (они оба могут быть синими). То есть в этом ряду он увидит максимум $3 + 2 = 5$ синих кубиков.

Средний ряд. Первый столбик состоит из 4 кубиков (2 красных и 2 синих), поэтому он полностью загораживает последний столбик, а также 4 из 5 кубиков второго столбика.

Таким образом, Женя видит все кубики первого столбика (среди них 2 синих), а также 1 кубик из второго столбика (он может быть синим). То есть в этом ряду он увидит максимум $2 + 1 = 3$ синих кубика.

Правый ряд. Первый столбик состоит из 3 кубиков (2 красных и 1 синий), поэтому он загораживает 3 из 6 кубиков второго столбика. При этом второй столбик полностью загораживает последний столбик.

Таким образом, Женя видит все кубики первого столбика (среди них 1 синий), а также 3 кубика из второго столбика (все три могут быть синими). То есть в этом ряду он увидит максимум $1 + 3 = 4$ синих кубика.

Суммарно Женя увидит максимум $5 + 3 + 4 = 12$ синих кубиков. □

Задача 4.7. На столе лежит 4 стопки монет. В первой стопке 9 монет, во второй — 7, в третьей — 5, в четвёртой — 10. За один ход разрешается добавить по одной монете к трём разным стопкам. За какое наименьшее количество ходов можно добиться того, чтобы во всех стопках стало поровну монет?

Ответ: 11.

Решение. Предположим, было сделано N ходов, после которых во всех стопках стало поровну монет.

Немного изменим правила. Пусть первоначально в стопках лежало не 9, 7, 5 и 10 монет, а $N+9, N+7, N+5$ и $N+10$ соответственно; а ходы выполним следующим образом: вместо добавления по одной монете в три стопки, будем забирать одну монету из стопки (той, в которую во время оригинального хода мы не добавляли монету). Заметим, что итоговый результат от этого не изменится! (Фактически, вместо добавления монет в три стопки мы добавляем их во все четыре, а потом одну забираем.)

В рамках новых правил ответить на вопрос гораздо проще. За один ход мы забираем одну монету из любой стопки, и наша цель — как можно быстрее сделать так, чтобы монет во всех стопках стало поровну. Легко понять, что для этого надо везде оставлять по $N+5$ монет. Для этого из первой стопки нужно забрать 4 монеты, из второй — 2, из третьей — 0, из четвёртой — 5. Итого надо совершить $4+2+0+5=11$ ходов. □

Задача 4.8. У Васи есть шесть одинаковых игральных кубиков, на гранях каждого из которых записаны числа от 1 до 6 (каждое — по одному разу). Вася бросал все шесть кубиков шесть раз подряд. Ни на одном из кубиков не выпадало дважды одно и то же число.

Известно, что при первом броске сумма чисел на верхних гранях равнялась 21, а при следующих четырёх бросках — 19, 20, 18 и 25. Какая сумма получилась при шестом броске?

Ответ: 23.

Решение. Поскольку за шесть бросков ни на одном из кубиков не выпадало дважды одно и то же число, то на каждом кубике выпали по одному разу все числа от 1 до 6.

Посчитаем общую сумму всех чисел, выпавших на всех кубиках за шесть бросков. Для одного кубика эта сумма равняется $1+2+3+4+5+6=21$, а для шести — $6\cdot 21=126$.

Осталось посчитать сумму чисел на шестом броске: $126-21-19-20-18-25=23$. □

Замечание. Одна из возможных конфигураций бросков кубиков изображена ниже (первое число в сумме — это число на первом кубике, второе число — на втором, ..., шестое число — на шестом).

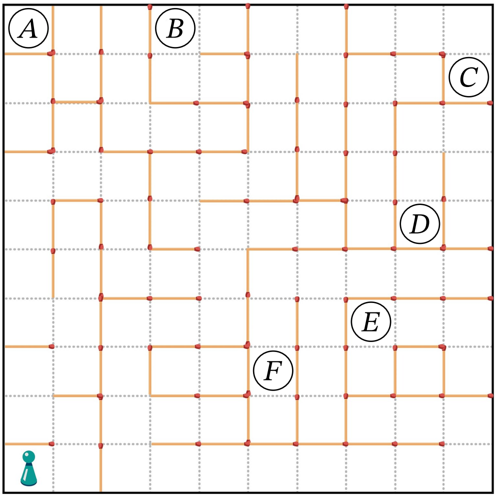
$$1+5+6+3+5+1=21;$$
$$2+4+3+4+1+5=19;$$
$$3+1+5+2+3+6=20;$$
$$4+2+2+5+2+3=18;$$
$$5+3+1+6+6+4=25;$$
$$6+6+4+1+4+2=23.$$

5 класс

Задача 5.1. На некоторые границы клеток доски 10×10 положили спички, а в одну из клеток — фишку, как показано на рисунке. За один ход фишку можно передвигать в соседнюю по стороне клетку, перепрыгивать через спичку запрещено.

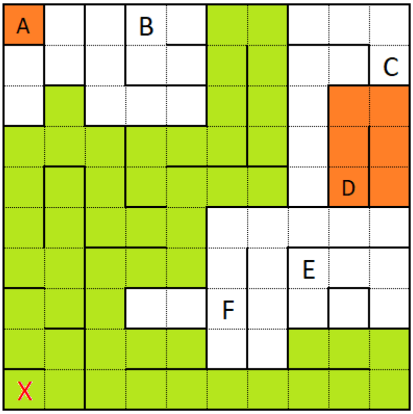
Клетка называется *достижимой*, если в неё можно попасть за несколько ходов из клетки X, убрав с доски не более одной спички.

Среди 6 клеток с кружочками выберите все, являющиеся достижимыми.



Ответ: B, C, E, F.

Решение. Закрасим зелёным цветом все клетки, куда можно добраться из клетки X, *не* убирая с доски спичек.



Теперь нетрудно понять, что клетки B, C, E, F являются достижимыми, а клетки A и D — нет (оранжевым покрашены те клетки, куда можно добраться либо из клетки A, либо из клетки D, не убирая с доски спичек). □

Задача 5.2. На уроке физкультуры в шеренгу встали 25 учеников 5«Б» класса. Каждый из ребят либо отличник, который всегда говорит правду, либо хулиган, который всегда врёт.

Отличник Влад встал на 13-е место. Все, кроме Влада, заявили: «Между мной и Владом ровно 6 хулиганов.» Сколько всего хулиганов в шеренге?

Ответ: 12.

Решение. Заметим, что ученики на местах 7—12 — хулиганы, так как между каждым из них и Владом меньше 6 человек. Значит, ученик с номером 6 — отличник. То же самое можно сказать про ученика на 5-м месте, затем про 4-е, про 3-е, про 2-е и про 1-е.

Получается, что первые шесть мест занимают отличники, следующие шесть мест занимают хулиганы, а уже на месте 13 стоит Влад. Аналогичное рассуждение можно провести для учеников на местах 14—25. Таким образом, в шеренге ровно $6 + 6 = 12$ хулиганов. □

Задача 5.3. Петя и Вася играли в солдатиков. Петя выстроил своих рыцарей «прямоугольником» — сколько-то колонн и сколько-то рядов. Когда все рыцари из первого и второго ряда ушли в разведку, то рыцарей осталось 24. Затем Васины лучники обратили в бегство всех рыцарей, которые остались в первой и второй колоннах. После этого осталось 18 рыцарей. Сколько рыцарей было у Пети изначально?

Ответ: 40.

Решение. Лучники обратили в бегство $24 - 18 = 6$ рыцарей. Это две колонны. Значит, на тот момент в каждой колонне было по 3 рыцаря. То есть 24 рыцаря стояли в 8 колоннах, по 3 рыцаря в каждой. Получается, что в разведку ушли два ряда, по 8 рыцарей в каждом, то есть всего 16 рыцарей (рис. 1).

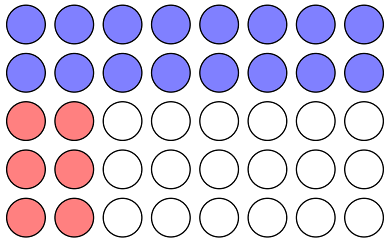


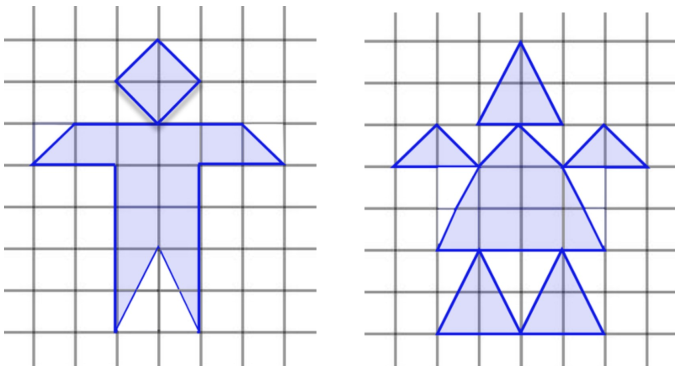
Рис. 1: К решению задачи 5.3. Синим отмечены ушедшие в разведку, а красным — обращенные в бегство.

Итого у Пети изначально было $24 + 16 = 40$ рыцарей. □

Задача 5.4. Маша нарисовала в тетради двух человечков. Площадь каждой клеточки равна 1.

Площадь какого из человечков больше?

Чему равна разница? Если площади одинаковы, в ответ запишите «0».

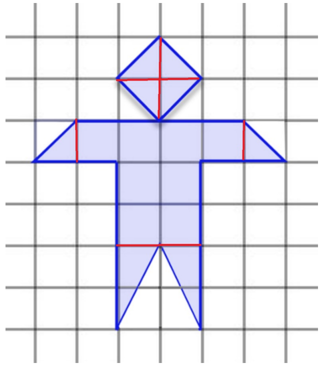


Ответ: площадь правого человечка на 2 больше, чем площадь левого.

Решение. Посчитаем площади человечков.

Как видно на рисунке справа, первый человечек состоит из

- 8 целых клеточек,
- 6 маленьких треугольников (каждый из которых равен половине клеточки),
- 2 больших треугольников (каждый из которых равен половине прямоугольника 1×2).



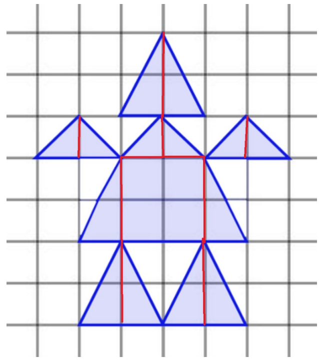
Каждые два маленьких треугольника «дают в сумме одну целую клеточку», поэтому их суммарная площадь равна 1. Каждые два больших треугольника «дают в сумме один прямоугольник 1×2», поэтому их суммарная площадь равна 2.

Тогда площадь первого человечка равна

$$8 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 13.$$

Как видно на рисунке справа, второй человечек состоит из

- 4 целых клеточек,
- 6 маленьких треугольников (каждый из которых равен половине клеточки),
- 8 больших треугольников (каждый из которых равен половине прямоугольника 1×2).



Тогда площадь второго человечка равна

$$4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 15.$$

Итак, площадь второго (правого) человечка на 2 больше, чем площадь первого (левого). □

Задача 5.5. У Дениса есть одинаковые десятирублёвые монеты, одинаковые двухрублёвые и одинаковые однорублёвые монеты (монет каждого вида больше 20). Сколькими способами Денис сможет заплатить без сдачи за пирожок стоимостью 16 рублей? Не обязательно использовать монеты каждого вида.

Ответ: 13.

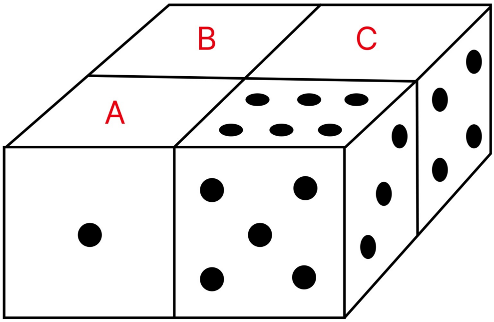
Решение. Если Денис будет использовать десятирублёвую монету, то ему останется набрать 6 рублей двухрублёвыми и однорублёвыми монетами. Есть 4 способа это сделать: использовав от 0 до 3 двухрублёвых монет.

Если Денис не будет использовать десятирублёвую монету, то ему потребуется набрать 16 рублей двухрублёвыми и однорублёвыми монетами. Есть 9 способов это сделать, использовав от 0 до 8 двухрублёвых монет.

Итого способов $4 + 9 = 13$. □

Задача 5.6. Есть 4 абсолютно одинаковых кубика, у каждого из которых на одной грани отмечены 6 точек, на другой — 5, ..., на оставшейся — 1. Известно, что на любых двух противоположных гранях кубика суммарно 7 точек.

Из этих 4 кубиков склеили фигуру, изображённую на рисунке. Известно, что на каждой паре склеенных граней отмечено одинаковое количество точек. Сколько точек на гранях A, B, C?



Ответ: $A = 2$, $B = 2$, $C = 6$.

Решение. Сначала воспользуемся условием о том, что сумма количеств точек на паре противоположных граней кубика равна 7, чтобы понять, как выглядит кубик, три грани которого нам известны. Его скрытые грани изображены на рис. 2 (с точностью до расположения точек на грани с 2 точками, которое из условия однозначно определить нельзя — но в решении данной задачи оно роли и не играет).

Мы знаем, что остальные кубики точно такие же. У каждого из кубиков с гранями A и C одну грань мы видим, а ещё одну грань знаем, так как она склеена с известной гранью первого кубика. По расположению двух соседних граней можно однозначно установить ориентацию кубика в пространстве. После этого станут известны две грани кубика B, которыми он склеен с кубиками A и C, и мы аналогично установим его ориентацию. Кубики в раздвинутом виде изображены на рис. 3 (опять-таки с точностью до расположения точек на гранях с двумя точками). □

Задача 5.7. В классе 31 ученик. У трёх из них ровно по три друга, у следующих трёх — по шесть, у следующих трёх — по девять, ..., у следующих трёх — по тридцать. Сколько друзей у 31-го ученика? (Дружба между людьми взаимна.)

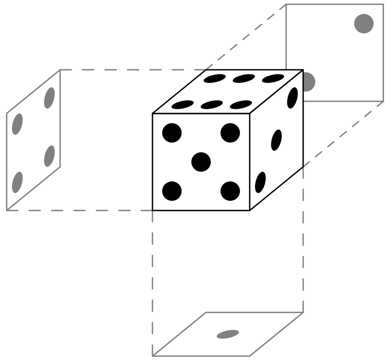


Рис. 2: к решению задачи 5.6

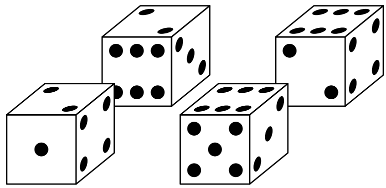


Рис. 3: к решению задачи 5.6

Ответ: 15.

Решение. Пусть у 31-го ученика x друзей.

Рассмотрим трёх людей, каждый из которых имеет по 30 друзей в классе. Всего в классе 31 ученик, поэтому они дружат со всеми одноклассниками.

Давайте выгоним их из класса. Тогда у каждого человека количество друзей уменьшится на 3:

- у первой тройки станет по 0 друзей;
- у второй тройки станет по 3 друга;
- …
- у девятой тройки станет по 24 друга;
- у последнего ученика станет $x - 3$ друга.

Троих учеников, у которых нет друзей, тоже выгоним из класса. Тогда конфигурация примет следующий вид.

В классе 25 учеников. У трёх из них ровно по три друга, у следующих трёх — по шесть, у следующих трёх — по девять, …, у следующих трёх — по 24. У последнего ученика $x - 3$

друга.

Повторим аналогичное действие ещё 4 раза. Тогда в классе останется только последний ученик, и у него будет $x - 15$ друзей. Так как в этот момент в классе больше не осталось людей, то $x = 15$. ☐

Задача 5.8. В многодетной семье Ивановых нет близнецов. Репортёр приехал к Ивановым, чтобы взять у них интервью.

Во время интервью каждый из детей сказал: «У меня есть старший брат». Немного подумав, репортёр очень удивился. Но отец семейства объяснил, что некоторые дети пошутили, и лишь шестеро сказали правду. Сколько детей может быть в этой семье, если известно, что мальчиков у Ивановых на 4 больше, чем девочек? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 8, 10.

Решение. Пусть в семье Ивановых x мальчиков. Тогда самый старший мальчик пошутил, а все остальные $x - 1$ мальчиков сказали правду.

Если $x \geqslant 8$, то правду сказали хотя бы 7 детей, что противоречит условию задачи.

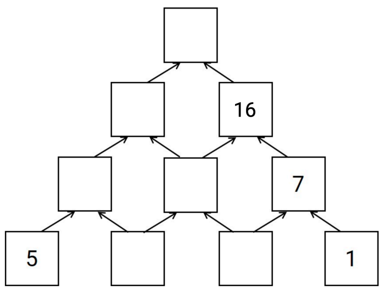
Если $x \leqslant 5$, то девочек в семье не более 1. Но тогда правду могли сказать не более $4 + 1$ детей, что противоречит условию задачи.

Если $x = 6$, то девочек в семье 2. Такая ситуация возможна, если самый старший и самый младший ребёнок в семье — девочки. Детей в семье $6 + 2 = 8$.

Если $x = 7$, то девочек в семье 3. Такая ситуация возможна, если трое самых старших детей в семье — девочки. Детей в семье $7 + 3 = 10$. ☐

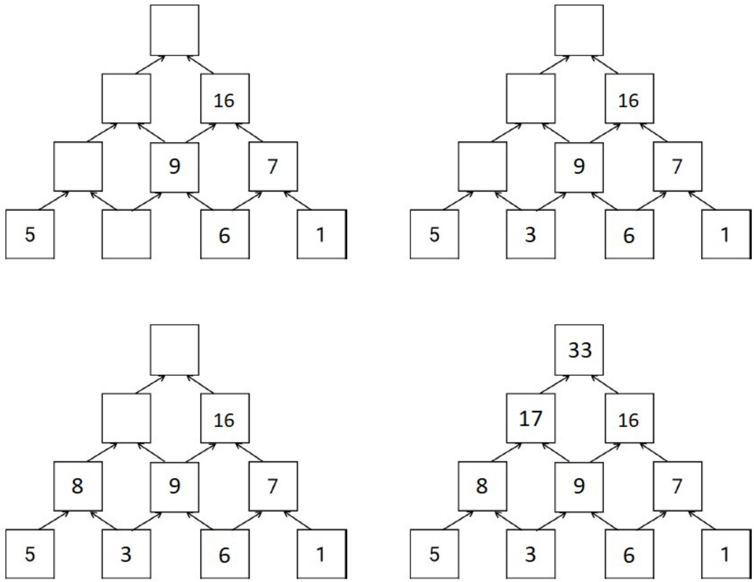
6 класс

Задача 6.1. Клеточки пирамиды заполнили по следующему правилу: над каждыми двумя соседними числами записали их сумму. Некоторые числа стёрли, и получилась конструкция, изображённая на рисунке. Какое число было в самой верхней клеточке?



Ответ: 33.

Решение. Покажем, как можно последовательно восстановить расстановку всех чисел.



□

Задача 6.2. Петя и Вася решили получить как можно больше пятёрок за 1 и 2 сентября.

- 1 сентября они суммарно получили 10 пятёрок, причём Петя получил пятёрок больше, чем Вася;
- 2 сентября Вася получил 3 пятёрки, а Петя не получил ни одной;
- по итогам этих двух дней Вася получил больше пятёрок, чем Петя.

Кто сколько пятёрок получил за эти два дня?

Ответ: Петя получил 6 пятёрок, а Вася — 7.

Решение. Первого сентября Петя получил больше пятёрок, чем Вася, поэтому Петя получил хотя бы 6 пятёрок, а Вася получил не более 4 пятёрок.

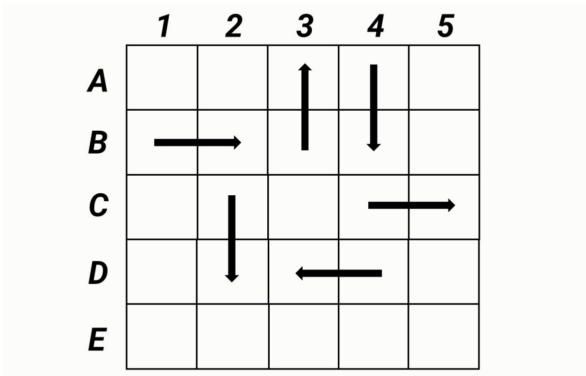
Если к ним прибавить пятёрки второго дня, то получим, что Петя получил хотя бы 6 пятёрок, а Вася получил не более 7 пятёрок.

Так как Вася получил за два дня больше пятёрок, то он получил ровно 7 пятёрок, а Петя — ровно 6 пятёрок. □

Задача 6.3. Фишку поставили на некоторую клетку доски 5×5. Передвигая фишку на соседнюю по стороне клетку, обошли всю доску за исключением одной клетки и вернулись на стартовую позицию. В каждой клетке, кроме начальной, фишка побывала не более одного раза.

На рисунке изображены стрелочки, показывающие, куда передвигали фишку из некоторых клеток.

Выберите на картинке клетку, в которую фишка *не* заходила.



Ответ: $C1$.

Решение. Раз фишка вернулась в исходную клетку, будем считать её путь циклическим. Заметим, что никакая часть пути фишки не может рассекать доску на две области, в каждой из которых более 1 клетки, так как после прохождения этой части пути фишка должна перейти в одну из областей — а во вторую зайти уже не сможет, что противоречит условию.

Сначала установим, куда фишка могла пойти из клетки $B2$:

- в клетку $A2$ она перейти не могла, так как оттуда нельзя пройти ни в $A1$ (путь $B1 \to B2 \to A2 \to A1$ не продолжается), ни в $A3$ (туда уже ведёт стрелка из другой клетки);
- в клетку $B3$ она перейти не могла, так как путь $B1 \to B2 \to B3 \to A3$ рассекает доску на две области из более чем одной клетки.

Следовательно, из $B2$ фишка перешла в $C2$, а далее, согласно стрелке, в $D2$.

Куда фишка могла пойти из клетки $D2$?

- в $D3$ она перейти не могла, так как туда уже ведёт стрелка;
- в $E2$ она перейти не могла, так как путь $B1 \to B2 \to C2 \to D2 \to E2$ рассекает доску на две области из более чем одной клетки.

Следовательно, из $D2$ фишка перешла в $D1$. Ясно, что клетка $C1$ в таком случае должна остаться непосещённой, так как она отсечена частью пути $B1 \to B2 \to C2 \to D2 \to D1$.

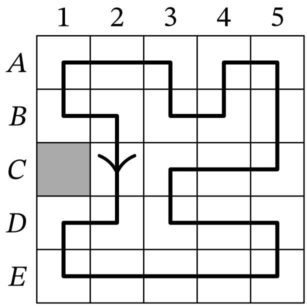


Рис. 4: к решению задачи 6.3

Путь, удовлетворяющий условию и проходящий по всем остальным клеткам, приведен на рис. 4. Он строится единственным образом. □

Задача 6.4. На клавиатуре компьютера не работает клавиша с цифрой 1. Например, если попытаться напечатать число 1231234, то пропечатается только число 23234.

Саша попытался напечатать 8-значное число, но пропечаталось только 202020. Сколько существует 8-значных чисел, подходящих под это условие?

Ответ: 28.

Решение. Ясно, что не пропечаталось 2 единицы. Есть 7 позиций, где они могут располагаться (они могут быть как в одной позиции, так и в разных):

- **X** 202020;
- 2 **X** 02020;
- 20 **X** 2020;
- 202 **X** 020;
- 2020 **X** 20;
- 20202 **X** 0;
- 202020 **X**.

Случай 1. Если первую единицу поставить на первую позицию, то для второй единицы останется 7 вариантов размещения (в любую из вышеперечисленных позиций).

Случай 2. Если первую единицу поставить на вторую позицию, то для второй единицы останется 6 вариантов размещения (в любую из вышеперечисленных позиций, кроме первой, так как этот вариант мы уже посчитали ранее).

Случай 3. Если первую единицу поставить на третью позицию, то для второй единицы останется 5 вариантов размещения (в любую из вышеперечисленных позиций, кроме первой и второй, так как эти варианты мы уже посчитали ранее).

…

Случай 7. Если первую единицу поставить на седьмую позицию, то для второй единицы останется 1 вариант размещения (только на седьмую позицию; все остальные варианты были посчитаны ранее).

Итого вариантов ровно $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$. □

Задача 6.5. На прямой отмечены 5 точек P, Q, R, S, T, именно в таком порядке. Известно, что сумма расстояний от P до остальных 4 точек равна 67, а сумма расстояний от Q до остальных 4 точек равна 34. Найдите длину отрезка PQ.

Ответ: 11.

Решение. Из условия задачи известно, что

$$PQ + PR + PS + PT = 67 \quad \text{и} \quad QP + QR + QS + QT = 34.$$

Найдём разность этих величин:

$$\begin{aligned} 33 = 67 - 34 = (PQ + PR + PS + PT) - (QP + QR + QS + QT) = \\ = (PQ - QP) + (PR - QR) + (PS - QS) + (PT - QT) = 0 + PQ + PQ + PQ = 3 \cdot PQ, \end{aligned}$$

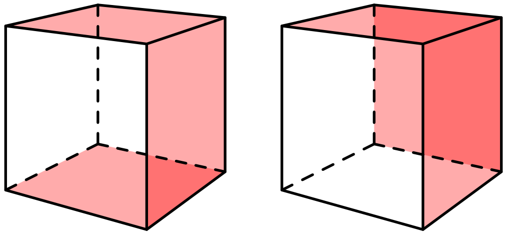
откуда $PQ = 11$. □

Задача 6.6. Женя покрасил три грани белого кубика $6 \times 6 \times 6$ в красный цвет. Затем он распилил его на 216 одинаковых маленьких кубиков $1 \times 1 \times 1$. Сколько у него могло получиться маленьких кубиков без красных граней? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 120, 125.

Решение. Есть принципиально два случая раскраски граней большого кубика:

- три раскрашенные грани образуют «букву П»;
- три раскрашенные грани имеют общую вершину.



В первом случае, если «срезать» раскрашенные кубики $1\times1\times1$, останется параллелепипед $4 \times 5 \times 6$. Тогда маленьких кубиков без красных граней будет $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$.

Во втором случае, если «срезать» раскрашенные кубики $1\times1\times1$, останется кубик $5\times5\times5$. Тогда маленьких кубиков без красных граней будет $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. □

Задача 6.7. Амурский и бенгальский тигры начали бегать по кругу в 12:00, каждый со своей постоянной скоростью. К 14:00 амурский тигр пробежал на 6 кругов больше бенгальского. Затем амурский тигр увеличил свою скорость на 10 км/ч, и к 15:00 он суммарно пробежал уже на 17 кругов больше бенгальского. Сколько метров составляет длина круга?

Ответ: 1250.

Решение. За первые 2 часа амурский тигр пробежал больше на 6 кругов, т.е. за 1 час он пробегал больше на 3 круга. Если бы он свою скорость не увеличивал, за первые 3 часа он пробежал бы на 9 кругов больше. Но прибавка скорости повлияла на то, что за третий час он пробежал дополнительные $17-9 = 8$ кругов. Поскольку он увеличил свою скорость на 10 км/ч, то добавленное расстояние составит 10 км/ч $\cdot$ 1 ч $=$ 10 км, а длина одного круга тогда $\frac{10}{8}$ км, или 1250 метров. □

Задача 6.8. В 6 «А» классе учатся несколько мальчиков и девочек. Известно, что в 6 «А»

- девочка Таня дружит с 12 мальчиками;
- девочка Даша дружит с 12 мальчиками;
- девочка Катя дружит с 13 мальчиками;
- у любой девочки найдётся друг среди любых трёх мальчиков.

Сколько мальчиков может быть в 6 «А» классе? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 13, 14.

Решение. Из условия следует, что мальчиков в классе хотя бы 13. Если бы их было хотя бы 15, то среди них можно было бы выбрать троих, которые не дружат с Таней. Но тогда у Тани среди них не нашлось бы друга, противоречие. Значит, всего мальчиков 13 или 14. Приведём соответствующие примеры.

1) Пусть в классе всего 3 девочки (Таня, Даша, Катя) и 13 мальчиков. Среди них есть мальчик Андрей, который не дружит только с Таней, а также мальчик Боря, который не дружит только с Дашей (все остальные пары людей в классе дружат). Легко видеть, что все условия задачи выполняются.

2) Пусть в классе всего 3 девочки (Таня, Даша, Катя) и 14 мальчиков. Среди них есть мальчики Влад и Денис, которые не дружат только с Таней, мальчики Женя и Кирилл, которые не дружат только с Дашей, а также мальчик Лёня, который не дружит только с Катей (все остальные пары людей в классе дружат). Легко видеть, что все условия задачи выполняются. □

7 класс

Задача 7.1. Решите ребус

$$C{,}BA + A{,}AA = B{,}A.$$

(Разными буквами обозначены разные цифры, одинаковыми буквами — одинаковые цифры.)

Ответ: $A = 5$, $B = 9$, $C = 3$.

Решение. Очевидно, что $A \neq 0$ (иначе, например, $C = B$).

Разряд сотых может исчезнуть при суммировании, только если цифры в разряде сотых в сумме оканчиваются на 0. Такое возможно только при $A = 5$. Тогда ребус можно переписать в следующем виде:

$$C{,}B5 + 5{,}55 = B{,}5,$$

$$C{,}B5 + 0,05 = B - 5.$$

В последнем равенстве справа написано целое число, и оно может получиться при суммировании нецелых чисел слева, только если $B = 9$. Тогда последнее равенство переписывается в следующем виде:

$$C{,}95 + 0,05 = 9 - 5.$$

Отсюда уже легко понять, что $C = 3$.

Замечание. Также задачу можно было решать с помощью умножения обеих частей исходного равенства на 100. □

Задача 7.2. Влад и Дима решили подзаработать. Каждый из них решил положить по 3000 рублей в банк, а через год все деньги снять.

Влад выбрал вклад «Уверенность»: за год сумма увеличивается на 20%, но при снятии банк взимает комиссию 10%.

Дима выбрал вклад «Надёжность»: за год сумма увеличивается на 40%, но при снятии банк взимает комиссию 20%.

(«Банк взимает комиссию $n\%$» означает то, что банк оставляет себе $n\%$ от текущей величины вклада, а оставшуюся часть вклада возвращает его владельцу.)

Кто получит большую годовую прибыль от вклада?

Чему будет равна разница? Ответ выразите в рублях. Если прибыль одинакова, то запишите 0.

Ответ: Дима заработает больше на 120 рублей.

Решение. У Влада сумма вклада за год возрастёт до $3000 \cdot 1{,}2$ рублей, а при снятии уменьшится до $3000 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}9 = 3240$ рублей.

У Димы же сумма вклада за год возрастёт до $3000 \cdot 1{,}4$ рублей, а при снятии уменьшится до $3000 \cdot 1{,}4 \cdot 0{,}8 = 3360$ рублей.

Следовательно, Дима заработает больше на 120 рублей. □

Задача 7.3. Смешарики Крош, Ёжик, Нюша и Бараш суммарно съели 86 конфет, причём каждый из них съел не менее 5 конфет. Известно, что:

- Нюша съела конфет больше, чем каждый из остальных смешариков;
- Крош и Ёжик суммарно съели 53 конфеты.

Сколько конфет съела Нюша?

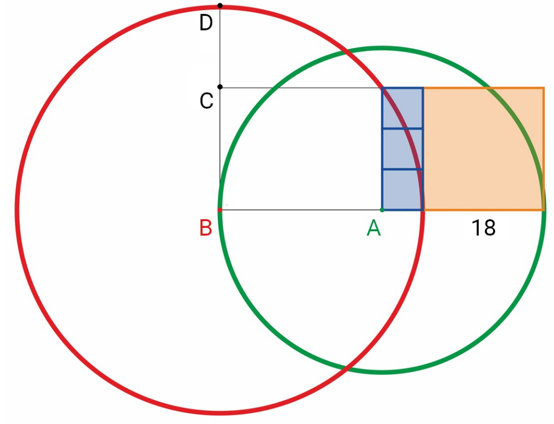
Ответ: 28.

Решение. Крош или Ёжик съел хотя бы 27 конфет (иначе они суммарно съели бы не более $26 + 26 = 52$ конфет), тогда Нюша съела хотя бы 28 конфет. Учитывая, что Бараш съел хотя бы 5 конфет, получаем, что суммарно все они съели хотя бы $53 + 28 + 5 = 86$ конфет. Следовательно, такое возможно, только если Нюша съела ровно 28 конфет, а Бараш — ровно 5 конфет. □

Задача 7.4. На рисунке ниже

- три синие фигуры — квадраты;
- оранжевая фигура — квадрат со стороной 18;
- точка A — центр зелёной окружности;
- точка B — центр красной окружности.

Найдите длину отрезка CD.



Ответ: 12.

Решение. У трёх синих квадратов есть общая сторона, поэтому они равны. Вертикальная сторона оранжевого квадрата, равная 18, состоит из трёх одинаковых вертикальных сторон синих квадратов, поэтому каждая из них равна 6. Значит, радиус зелёной окружности равен $6 + 18 = 24$, и $AB = 24$. Тогда радиус красной окружности равен $24 + 6 = 30$. Чтобы найти длину искомого отрезка, надо из этого радиуса вычесть длину вертикального отрезка, равного стороне оранжевого квадрата: $30 - 18 = 12$. □

Задача 7.5. В магазине продаются орехи четырёх видов: фундук, миндаль, кешью и фисташки. Степан хочет купить 1 килограмм орехов одного вида и ещё 1 килограмм орехов — другого. Он вычислил, во сколько ему может обойтись такая покупка в зависимости от того, какие два вида орехов он выберет. Пять из шести возможных покупок Степана стоили бы 1900, 2070, 2110, 2330 и 2500 рублей. Сколько рублей составляет стоимость шестой возможной покупки?

Ответ: 2290.

Решение. Пусть a, b, c, d — стоимость 1 килограмма фундука, миндаля, кешью и фисташек соответственно. Из условия следует, что множество $A = \{1900, 2070, 2110, 2330, 2500\}$ содержится в множестве $B = \{a+b, b+c, c+d, d+a, a+c, b+d\}$.

Заметим, что 6 элементов множества B можно разбить на 3 пары $(a+b, c+d)$, $(b+c, d+a)$, $(a+c, b+d)$ с одинаковой суммой $a+b+c+d$. Это означает, что в множестве A можно выделить 2 пары чисел с одинаковой суммой.

Нетрудно понять, что это могут быть только пары $(1900, 2500)$ и $(2070, 2330)$ с суммой 4400 (например, можно заметить, что все остальные пары либо пересекаются, либо у их сумм отличаются последние две цифры). Тогда неизвестная шестая стоимость вычисляется без труда: $4400 - 2110 = 2290$ рублей. □

Замечание. Условие задачи реализуется для $a = 930$, $b = 970$, $c = 1140$, $d = 1360$.

Задача 7.6. Магический квадрат — это таблица 3×3, в которой расставлены числа так, что суммы по всем строкам, столбцам и двум главным диагоналям одинаковы. На рисунке изображён магический квадрат, в котором все числа, кроме трёх, стёрты. Найдите, чему равно число в левом верхнем углу квадрата.

?	31	9
13		

Ответ: 14.

Решение. Пусть неизвестное число равно x, тогда суммы во всех строках, столбцах и на главных диагоналях равны $9 + 31 + x = 40 + x$.

1) Рассмотрев левый столбец, получаем, что в левом нижнем углу квадрата стоит число 27.

2) Рассмотрев главную диагональ, идущую вправо-вверх, получаем, что в центре квадрата стоит число $4 + x$.

3) Рассмотрев главную диагональ, идущую вправо-вниз, получаем, что в правом нижнем углу квадрата стоит число $36 - 2x$.

4) Рассмотрев правый столбец, получаем, что в средней его клетке стоит число $2x - 5$.

5) Рассмотрев среднюю строку, получаем необходимое уравнение на x:

$$40 + x = 13 + (4 + x) + (2x - 5).$$

Решая его, находим $x = 14$. □

Задача 7.7. Все 25 учеников 7 «А» класса участвовали в викторине из трёх туров. В каждом туре каждый участник набрал некоторое количество очков. Известно, что в каждом туре, а также по сумме всех трёх туров все участники набрали различное количество очков.

Ученик 7 «А» Коля в первом туре викторины оказался третьим, во втором — четвёртым, а в третьем — пятым. Какое самое низкое место мог занять Коля среди всех одноклассников по сумме очков за все три тура викторины?

Ответ: 10.

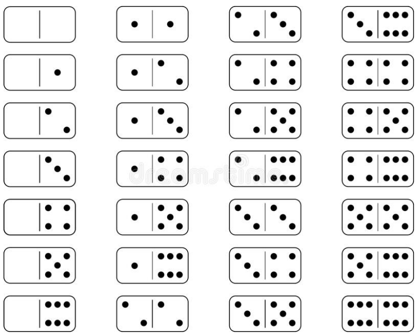
Решение. В первом туре Колю опередили 2 одноклассника, во втором — 3, в третьем — 4. Тогда по сумме всех трёх туров его могли опередить не более $2+3+4=9$ одноклассников, т. е. по сумме трёх туров он не мог оказаться ниже 10-го места.

Теперь приведём пример, как Коля мог оказаться ровно на 10-м месте. Пусть

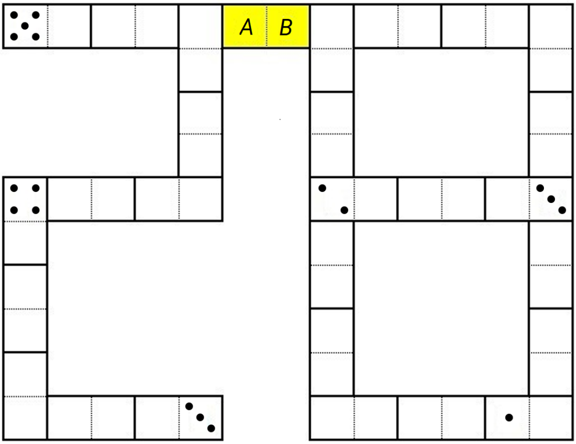
- в каждом из туров Коля набрал по 100 очков;
- в первом туре Андрей и Борис набрали 1000 и 2000 очков соответственно и заняли первые два места;
- во втором туре Влад, Геннадий и Денис набрали 10000, 20000, 30000 очков соответственно и заняли первые три места;
- в третьем туре Маша, Света, Таня, Катя набрали 100000, 200000, 300000, 400000 очков соответственно и заняли первые четыре места;
- в каждом из туров все остальные участники после Коли упорядочились в алфавитном порядке и набрали количество очков, равное их позиции в рейтинге с конца.

Легко видеть, что все условия задачи выполняются. □

Задача 7.8. Набор из 28 различных доминошек выглядит так:



Все эти 28 доминошек выложили так, что количество точек на соприкасающихся половинках доминошек одинаково. На некоторых половинках полностью стёрли количество точек. В итоге получилась конструкция, изображённая на рисунке ниже (пустые половинки могли быть изначально пустыми, а могли содержать какое-то количество точек).



Сколько точек на каждой из половинок жёлтой костяшки?

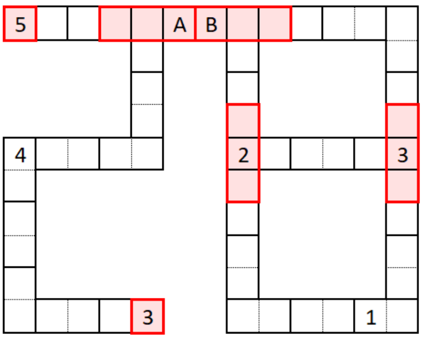
Точек на половинке A: ....

Точек на половинке B: ....

Ответ: $A = 2, B = 5.$

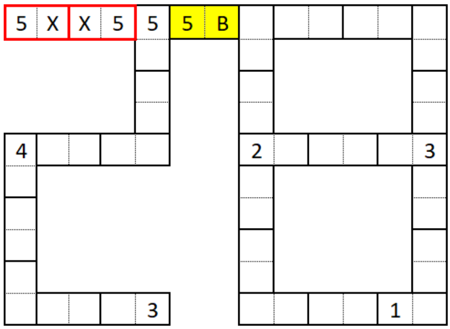
Решение. Сначала заметим, что любое число должно встречаться ровно на 8 половинках доминошек (на 6 доминошках в паре с другими числами и на одной доминошке дважды). То есть каждое число встречается чётное количество раз.

Рассмотрим выделенные красные области из 1 или 3 клеток. По условию числа на соприкасающихся половинках равны, а значит, внутри каждой выделенной области стоят одинаковые числа. Все остальные половинки доминошек разбиваются на пары соседних, где также должны стоять одинаковые числа.



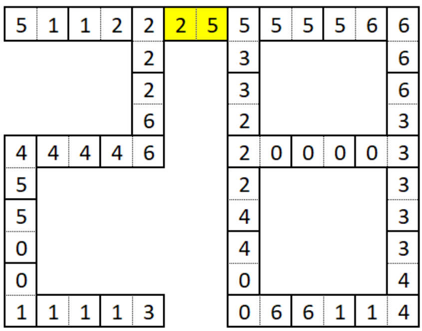
Получаем, что вне выделенных областей каждое число встречается чётное число раз. Значит, чтобы число встречалось чётное число раз во всей раскладке доминошек, количество выделенных красных областей с каждым числом должно быть чётно. Мы знаем, что стоит во всех выделенных областях, кроме областей с половинками A и B. Теперь заметим, что только числа 2 и 5 присутствуют в нечётном количестве (в одной выделенной области), а значит, в областях с половинками A и B, должны стоять именно они.

Осталось понять, где именно стоит 2, а где 5. Предположим, что в половинке A стоит 5, тогда все половинки левее данной определяются однозначно, и две выделенные на картинке доминошки получаются одинаковыми, чего быть не может.



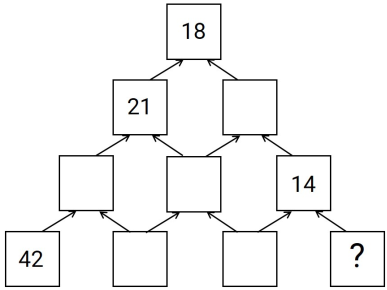
Получаем, что единственный возможный вариант — это $A = 2$ и $B = 5$. □

Замечание. Одна из возможных конфигураций доминошек изображена на рисунке ниже.



8 класс

Задача 8.1. Клетки пирамиды заполнили по следующему правилу: над каждыми двумя соседними числами записали их среднее арифметическое. Некоторые числа стёрли, и получилась конструкция, изображённая на рисунке. Какое число было в правой нижней клетке? (Среднее арифметическое двух чисел — это их сумма, разделённая на 2.)



Ответ: 6.

Решение. Восстановим числа в таблице, пройдя по ней сверху вниз. Например, если во второй строке стоят числа 21 и x, то из $18 = \frac{1}{2}(21 + x)$ получаем $x = 15$. Аналогично в третьей строке получаем, что рядом с числом 14 стоит 16, а рядом с ним — 26; в последней строке стоят числа 42, 10, 22 и 6. □

Задача 8.2. Малыши Коля и Маша учатся считать. В первую секунду Коля назвал число 1, во вторую — 2, в третью — 3 и т. д. Если Маше нравится число, названное Колей, то она записывает его себе в тетрадь, в конец текущей строки (одно число за другим, без пробелов и запятых). Спустя n секунд у Маши в тетради оказалось записано

$$2\,7\,2\,6\,2\,5\,2\,4\,2\,3.$$

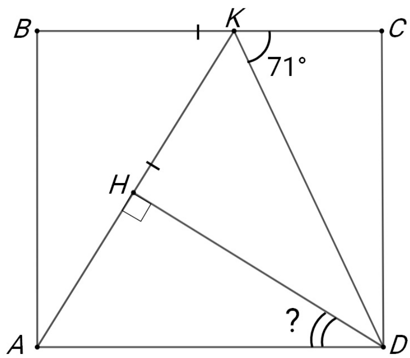
Какое наименьшее значение может принимать n?

Ответ: 423.

Решение. Спустя n секунд Маша дописала в конец строки число n. Если это число состоит из 1 или 2 цифр, то оно равно 3 или 23, но оба этих числа, как нетрудно понять, не подходят. Значит, n состоит хотя бы из 3 цифр, и $n \geqslant 423$.

Осталось заметить, что n может быть равно 423, если Маше нравятся числа 2, 7, 26, 252, 423. □

Задача 8.3. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ отмечена точка K. Точка H на отрезке AK такова, что $\angle AHD = 90°$. Оказалось, что $AK = BC$. Сколько градусов составляет угол ADH, если $\angle CKD = 71°$?



Ответ: 52.

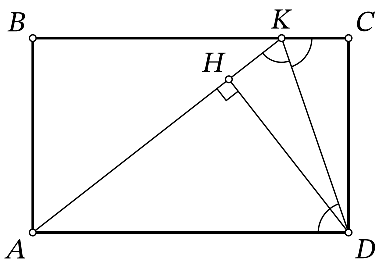


Рис. 5: к решению задачи 8.3

Решение. Поскольку $BC \parallel AD$, получаем $\angle ADK = \angle CKD = 71°$ (рис. 5).

Поскольку $AK = BC = AD$, треугольник AKD является равнобедренным и $\angle AKD = \angle ADK = 71°$. Тогда $\angle KAD = 180° - 2 \cdot 71° = 38°$ и $\angle ADH = 90° - \angle KAD = 52°$. □

Задача 8.4. По кругу стоят 36 детей, каждый из них одет в красную или синюю кофту. Известно, что рядом с каждым мальчиком стоит девочка, а рядом с каждой девочкой стоит человек в синей кофте. Найдите наибольшее возможное количество девочек в красных кофтах.

Ответ: 24.

Решение. Заметим. что не найдётся 3 стоящих подряд девочек в красных кофтах (иначе для средней из них не выполняется условие). Разбив 36 детей на 12 троек, получаем, что в каждой из них не более 2 девочек в красных кофтах, а всего девочек в красных кофтах не больше $2 \cdot 12 = 24$.

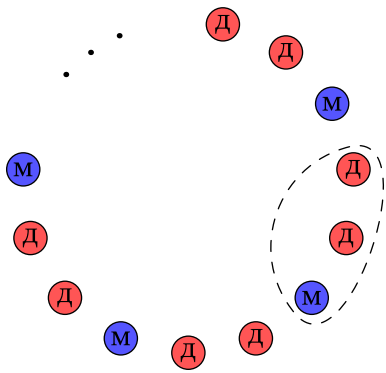


Рис. 6: к решению задачи 8.4

Пример построить легко: в каждой из 12 троек по часовой стрелке располагаются две девочки в красных кофтах, а следом за ними мальчик в синей кофте (рис. 6). Ясно, что все условия задачи выполняются. □

Задача 8.5. Из города в деревню выехал автомобиль, одновременно с ним из деревни в город выехал велосипедист. Когда автомобиль и велосипедист встретились, автомобиль сразу же развернулся и поехал обратно в город. В итоге велосипедист приехал в город на 35 минут позже автомобиля. Сколько минут затратил велосипедист на весь путь, если известно, что его скорость в 4,5 раза меньше скорости автомобиля?

Ответ: 55.

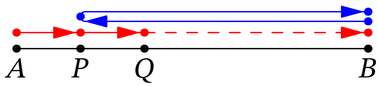


Рис. 7: к решению задачи 8.5

Решение. На рис. 7 отметим деревню A, город B, точку P встречи автомобиля и велосипедиста, а также точку Q, где оказался велосипедист в момент возвращения автомобиля в город. Поскольку скорости автомобиля и велосипедиста различаются в 4,5 раза, то $AP : PB = 1 : 4{,}5 = 2 : 9$. Поскольку автомобиль потратил на перемещения $B \to P$ и $P \to B$ одинаковое время, то и велосипедист потратил на соответствующие перемещения $A \to P$ и $P \to Q$ одинаковое время. Следовательно, $AP : PQ : QB = 2 : 2 : 7$.

Поскольку велосипедист потратил на перемещение $Q \to B$ ровно 35 минут, то на всё перемещение $A \to B$ он потратил пропорциональное время: $35 \cdot \frac{11}{7} = 55$ минут. □

Задача 8.6.

Паша выписал в порядке возрастания все натуральные делители натурального числа k и их пронумеровал: первый, второй, ...

Паша заметил, что если шестой делитель умножить на тринадцатый делитель, то получится исходное число k.

Сколько натуральных делителей имеет число k?

Ответ: 18.

Решение. Пусть натуральные делители числа k упорядочены так:

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_6 < \ldots < d_{13} < \ldots < d_{m-1} < d_m = k.$$

Заметим, что числа

$$k = \frac{k}{d_1} > \frac{k}{d_2} > \ldots > \frac{k}{d_6} > \ldots > \frac{k}{d_{13}} > \ldots > \frac{k}{d_{m-1}} > \frac{k}{d_m} = 1$$

также являются делителями числа k, они различны, и их столько же. Значит, это те же самые числа, только в обратном порядке. Получаем, что

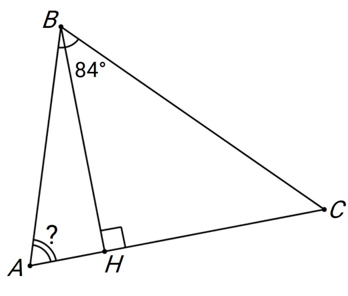
$$d_1 = \frac{k}{d_m},\ d_2 = \frac{k}{d_{m-1}},\ \ldots, \quad d_m = \frac{k}{d_1}.$$

Таким образом, делители разбиваются на пары «противоположных», дающих в произведении исходное число k:

$$k = d_1 \cdot d_m = d_2 \cdot d_{m-1} = \ldots$$

В каждой такой паре сумма индексов делителей равна $m + 1$. Поскольку по условию $d_6 \cdot d_{13} = k$, получаем, что $m = 6 + 13 - 1 = 18$. □

Задача 8.7. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Оказалось, что $CH = AB + AH$. Сколько градусов составляет угол BAC, если $\angle ABC = 84°$?



Ответ: 64.

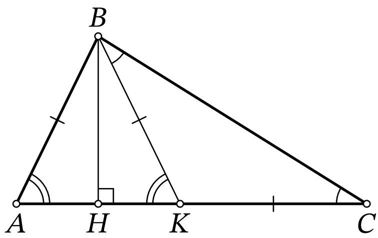


Рис. 8: к решению задачи 8.7

Решение. Отметим на отрезке CH точку K такую, что $AH = HK$. Тогда из условия следует, что $AB = CK$ (рис. 8).

В треугольнике ABK высота BH совпадает с медианой, поэтому он является равнобедренным, $AB = BK$ и $\angle BAH = \angle BKA$.

Пусть $\angle ACB = x$. Поскольку $CK = AB = BK$, треугольник BCK является равнобедренным, и $\angle KBC = \angle KCB = x$. Тогда $\angle AKB = 2x$, $\angle KAB = 2x$ и $\angle ABC = 180^\circ - 3x$.

Поскольку $84^\circ = \angle ABC = 180^\circ - 3x$, находим $x = 32^\circ$. Тем самым, $\angle BAC = 2 \cdot 32^\circ = 64^\circ$. □

Задача 8.8. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

Однажды собрались 10 жителей острова, все они надели на себя футболки с номерами от 1 до 10 (у разных жителей разные номера). Каждый из них сказал одну из фраз:

- «Среди собравшихся нет рыцаря, номер футболки которого больше моего»
- «Среди собравшихся нет лжеца, номер футболки которого меньше моего».

Известно, что каждая из этих фраз прозвучала ровно 5 раз. Сколько рыцарей могло быть среди этих 10 жителей? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Решение. Рассмотрим людей, сказавших первую фразу. Среди них не более одного рыцаря (в ином случае рыцарь с наименьшим номером среди них соврал бы). Таким образом, всего рыцарей не больше 6.

Также среди всех присутствующих есть хотя бы 1 рыцарь (в ином случая все лжецы, говорившие первую фразу, говорили бы правду).

Для каждого количества рыцарей от 1 до 6 существует пример. Пусть люди говорят фразы в порядке их номеров футболок. Запишем в ряд номера произнесенных ими фраз:

- 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1: всего 6 рыцарей с номерами 1—5 и 10.

- $2, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 1$: всего 5 рыцарей с номерами 1—4 и 10.
- $2, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1$: всего 4 рыцаря с номерами 1—3 и 10.
- $2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$: всего 3 рыцаря с номерами 1—2 и 10.
- $2, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$: всего 2 рыцаря с номерами 1 и 10.
- $1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$: всего 1 рыцарь с номером 10. □

9 класс

Задача 9.1. В магазине продаётся 20 товаров, стоимости которых — различные натуральные числа от 1 до 20 рублей. Магазин решил устроить акцию: при покупке любых 5 товаров один из них выдаётся в подарок, причём покупатель сам выбирает, какой товар получит бесплатно. Влад хочет купить все 20 товаров в этом магазине, заплатив как можно меньше. Сколько рублей ему понадобится? (Каждый из 20 товаров продаётся в 1 экземпляре.)

Ответ: 136.

Решение. Влад может воспользоваться акцией не более 4 раз, поэтому он бесплатно приобретёт не более 4 товаров. Суммарная стоимость этих 4 товаров не превосходит $17+18+19+20$ рублей. Значит, рублей Владу надо не менее

$$(1+2+3+\ldots+20)-(17+18+19+20)=1+2+3+\ldots+16=\frac{16\cdot 17}{2}=136.$$

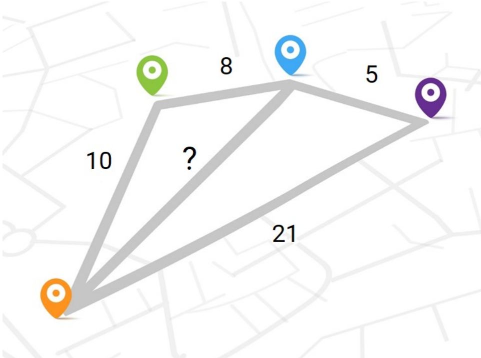
Покажем, что 136 рублей ему точно хватит. Он может совершать покупки товаров со следующими стоимостями: $(1, 2, 3, 4, 17)$, $(5, 6, 7, 8, 18)$, $(9, 10, 11, 12, 19)$, $(13, 14, 15, 16, 20)$. Если Влад в каждой покупке будет брать последний товар бесплатно, то потратит в точности 136 рублей. □

Задача 9.2. Ваня загадал два натуральных числа, произведение которых равняется 7200. Какое наибольшее значение может принимать НОД этих чисел?

Ответ: 60.

Решение. Поскольку каждое из этих чисел делится на их НОД, то их произведение делится на квадрат этого НОД. Наибольший точный квадрат, на который делится число $7200 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ — это $3600 = (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^2$, поэтому НОД двух искомых чисел не превосходит 60. При этом НОД может равняться 60, если искомые два числа — это 60 и 120. □

Задача 9.3. Четыре города и пять дорог расположены так, как изображено на рисунке. Длины всех дорог равны целому числу километров. Длины четырёх дорог указаны на рисунке. Сколько километров составляет длина оставшейся?



Ответ: 17.

Решение. Будем пользоваться неравенством треугольника: в любом невырожденном треугольнике сумма любых двух сторон строго больше оставшейся.

Пусть x км — неизвестная длина. Из левого треугольника видим, что $x < 10 + 8 = 18$. Но если $x \leqslant 16$, то в правом треугольнике неравенство треугольника не выполняется: $x + 5 \leqslant 21$. Поскольку x — целое число, меньшее 18 и большее 16, то оно равно 17. □

Задача 9.4. Простое число p таково, что число $p+25$ является седьмой степенью простого числа. Чему может быть равно p? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 103.

Решение. Воспользуемся тем, что единственное простое чётное число — это 2.

- Пусть $p = 2$, тогда $p + 25 = 27$, что не является седьмой степенью. Противоречие.
- Пусть $p > 2$, тогда p нечётно, а $p + 25$ чётно. Поскольку $p + 25$ чётно и является седьмой степенью простого числа, то это простое число равно 2. Следовательно, $p + 25 = 2^7 = 128$, откуда получаем $p = 103$. □

Задача 9.5. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

Однажды собрались 80 жителей острова, все они надели на себя футболки с номерами от 1 до 80 (у разных жителей разные номера). Каждый из них сказал одну из двух фраз:

- «Среди собравшихся хотя бы у 5 лжецов номер футболки больше моего».
- «Среди собравшихся хотя бы у 5 лжецов номер футболки меньше моего».

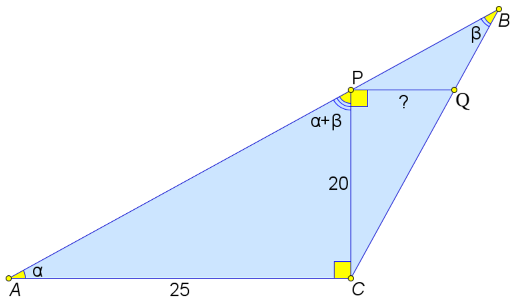
Какое наименьшее количество рыцарей могло быть среди этих 80 жителей?

Ответ: 70.

Решение. Предположим, что лжецов хотя бы 11. Упорядочим по возрастанию номера на их футболках и выберем лжеца с 6-м по счёту номером. Тогда он обязан сказать правду, ведь есть хотя бы 5 лжецов как с меньшим номером, так и с бóльшим. Таким образом, лжецов не более 10, т. е. рыцарей не менее 70.

Покажем, что рыцарей могло быть ровно 70. Пусть, например, рыцари были в футболках с номерами 1—70, а лжецы — в футболках с номерами 71—80. Все рыцари и лжецы с номерами 76—80 сказали первую фразу, а лжецы с номерами 71—75 сказали вторую фразу. Ясно, что все условия задачи выполняются. □

Задача 9.6. Дан тупоугольный треугольник ABC с тупым углом C. На его сторонах AB и BC отмечены точки P и Q соответственно так, что $\angle ACP = CPQ = 90^\circ$. Найдите длину отрезка PQ, если известно, что $AC = 25$, $CP = 20$, $\angle APC = \angle A + \angle B$.



Ответ: 16.

Решение. Поскольку $\angle PCB + \angle PBC = \angle APC = \angle PAC + \angle PBC$, получаем $\angle PCB = \angle PAC$.

Заметим, что прямоугольные треугольники PAC и QCP подобны по острому углу, и

$$\frac{25}{20} = \frac{AC}{CP} = \frac{PC}{PQ} = \frac{20}{PQ},$$

откуда находим $PQ = \frac{20 \cdot 20}{25} = 16$. □

Задача 9.7. Дан квадратный трёхчлен $P(x)$, старший коэффициент которого равен 1. На графике $y = P(x)$ отметили две точки с абсциссами 10 и 30. Оказалось, что биссектриса первой четверти координатной плоскости пересекает отрезок между ними в его середине. Найдите $P(20)$.

Ответ: -80.

Решение. Середина этого отрезка имеет координаты $(\frac{10+30}{2}, \frac{P(10)+P(30)}{2})$. Поскольку она лежит на биссектрисе первой четверти, т.е. на прямой $y = x$, эти координаты равны. Отсюда получаем $P(10) + P(30) = 40$.

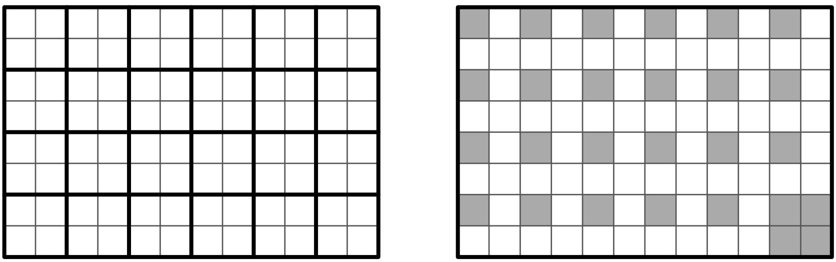
Так как $P(x)$ приведённый, его можно записать в виде $P(x) = x^2 + ax + b$. Тогда условие $P(10)+P(30) = 40$ переписывается в виде $100+10a+b+900+30a+b = 40$, откуда следует, что $40a + 2b = -960$ и $20a + b = -480$.

Следовательно, $P(20) = 400 + 20a + b = 400 - 480 = -80$. □

Задача 9.8. В таблице 8×12 некоторые N клеток — чёрные, а остальные — белые. За одну операцию разрешается покрасить три клетки, образующие трёхклеточный уголок, в белый цвет (некоторые из них ещё до перекрашивания могли быть белыми). Оказалось, что таблицу невозможно сделать полностью белой менее чем за 25 таких операций. Найдите наименьшее возможное значение N.

Ответ: 27.

Решение. Разобьём таблицу 8×12 на 24 квадрата 2×2 (рис. 9a).



(a) (b)

Рис. 9: к решению задачи 9.8

Сначала покажем, как можно покрасить в чёрный цвет 27 клеток требуемым образом. В каждом квадрате 2×2 покрасим верхнюю левую клетку, а в правом нижнем квадрате также закрасим все остальные клетки (рис. 9b). Заметим, что никакой трёхклеточный уголок не может одновременно накрыть чёрные клетки из двух разных квадратов 2×2. Поэтому потребуется не менее 2 операций для правого нижнего квадрата, и ещё 23 операции для оставшихся квадратов, т. е. суммарно не менее 25 операций.

Теперь покажем, что если чёрных клеток 26, то таблицу можно гарантированно сделать полностью белой не более чем за 24 операции (если изначально чёрных клеток меньше 26, то некоторые белые можно считать чёрными). Для этого нам достаточно либо один раз перекрасить 3 чёрные клетки в белый цвет, либо дважды перекрасить 2 чёрные клетки в белый цвет. Действительно, после таких действий количество доступных операций будет не меньше оставшегося количества чёрных клеток, поэтому дальше достаточно будет каждый раз перекрашивать хотя бы по одной чёрной клетке.

Поскольку чёрных клеток всего 26, а квадратов 2×2 всего 24, то как раз либо в каком-то квадрате есть 3 чёрные клетки, либо хотя бы в двух квадратах есть по 2 чёрные клетки (иначе чёрных клеток не больше $24 + 1 = 25$). Перекрасив соответствующие трёхклеточные уголки, а затем перекрашивая хотя бы по одной чёрной клетке, добьёмся требуемого не более чем за 24 операции. $\square$

10 класс

Задача 10.1. Саша уже неделю смотрит все серии интересного сериала подряд. Вчера Саша посмотрел 9 серий, а сегодня всего 6. Оказалось, что сумма номеров всех серий, просмотренных вчера, равна сумме номеров всех серий, просмотренных сегодня. Какой номер имеет последняя просмотренная Сашей серия? (Серии нумеруются последовательными натуральными числами, начиная с 1.)

Ответ: 25.

Решение. Обозначим за x номер первой серии, которую Саша посмотрел вчера. Тогда номера остальных серий, просмотренных вчера, — это $x+1, x+2, \ldots, x+8$, и сумма номеров всех вчерашних серий равна $9x + (1 + 2 + \ldots + 8) = 9x + 36$.

Сегодня Саша посмотрел серии с номерами $x + 9, x + 10, \ldots, x + 14$, сумма которых равна $6x + (9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14) = 6x + 69$. Получаем уравнение

$$9x + 36 = 6x + 69,$$

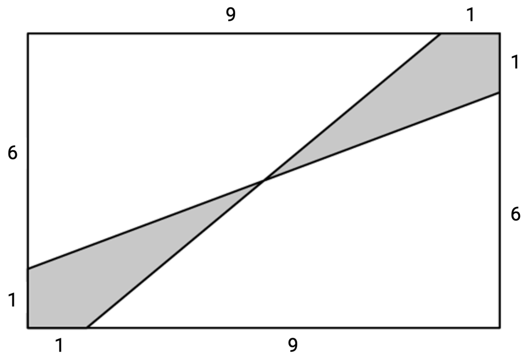
откуда $x = 11$. Таким образом, последняя серия, просмотренная сегодня, имеет номер $x + 14 = 25$. $\square$

Задача 10.2. В магазине продаются 15 видов шоколада. За неделю Андрей попробовал 6 видов, Борис — 11, а Денис — 13. Оказалось, что ни один вид шоколада не продегустировали все трое. Сколько видов шоколада попробовали и Андрей, и Борис?

Ответ: 2.

Решение. Андрей не попробовал 9 видов шоколада, Борис — 4, Денис — 2. В сумме это 15, и поскольку каждый из 15 видов хотя бы кто-то не попробовал, то эти не попробованные ребятами виды шоколада не должны пересекаться. Следовательно, Андрей и Борис не попробовали в совокупности ровно $9 + 4 = 13$ видов, т. е. попробовали вместе ровно $15 - 13 = 2$ вида. $\square$

Задача 10.3. Дан прямоугольник 7×10. Чему равна площадь закрашенной фигуры?



Ответ: 8,5.

Решение. Пусть O — центр прямоугольника; из симметрии ясно, что через эту точку проходят оба отрезка, проведённые внутри него. Расстояния от O до сторон прямоугольника равны $\frac{7}{2} = 3{,}5$ и $\frac{10}{2} = 5$.

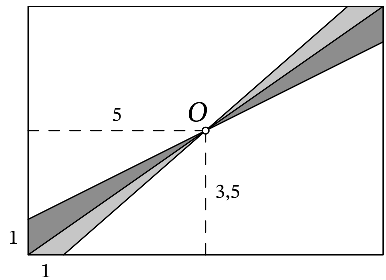


Рис. 10: к решению задачи 10.3

Соединим O с двумя вершинами прямоугольника, как на рис. 10. Тогда вся закрашенная фигура разбивается на 4 треугольника, у каждого из которых известна сторона и соответствующая ей высота. Осталось найти суммарную площадь:

$$\frac{1 \cdot 3{,}5}{2} + \frac{1 \cdot 3{,}5}{2} + \frac{1 \cdot 5}{2} + \frac{1 \cdot 5}{2} = 3{,}5 + 5 = 8{,}5. \qquad \square$$

Задача 10.4. В ряду чисел

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots, 201, 201, \ldots, 201$$

каждое число n встречается ровно n раз для всех $1 \leqslant n \leqslant 201$. Выберем в этом ряду такое число, слева и справа от которого чисел поровну. Определите это число.

Ответ: 142.

Решение. Всего чисел в ряду $1+2+3+\ldots+201 = \frac{201\cdot 202}{2} = 20301$, поэтому число, слева и справа от которого чисел поровну, стоит на 10151-й позиции. Следовательно, необходимо найти такое наименьшее n, для которого $1+2+\ldots+n \geqslant 10151$.

Итак, $\frac{n(n+1)}{2} \geqslant 10151$. При $n = 141$ получаем $\frac{n(n+1)}{2} = 10011$, а при $n = 142$ получаем $\frac{n(n+1)}{2} = 10153$. Следовательно, ответом в задаче является число 142. □

Задача 10.5. Сумма трёх различных натуральных делителей нечётного натурального числа n равна 10327. Какое наименьшее значение может принимать n?

Ответ: 6735.

Решение. Наибольший делитель числа n равен n. Поскольку это число нечётно, второй по величине его делитель не превосходит $\frac{n}{3}$, а третий — не превосходит $\frac{n}{5}$. Следовательно, сумма трёх любых различных делителей не превосходит $n + \frac{n}{3} + \frac{n}{5} = \frac{23n}{15}$. Получаем, что $10327 \leqslant \frac{23n}{15}$, откуда $n \geqslant 6735$.

Отметим также, что число 6735 подходит под условие (оно нечётно, делится на 3 и на 5): сумма трёх его наибольших делителей равна $6735 + \frac{6735}{3} + \frac{6735}{5} = 10327$. □

Задача 10.6. На плоскости дана точка P. Какое наименьшее количество прямых, не проходящих через точку P, можно провести на плоскости так, чтобы любой луч с началом в точке P пересекал хотя бы 170 выбранных прямых?

Ответ: 341.

Решение. Предположим, что проведено не более 340 прямых. Рассмотрим вспомогательную прямую ℓ, проходящую через точку P и параллельную какой-нибудь из выбранных. Прямая ℓ пересекается не более чем с 339 прямыми, поэтому либо по одну, либо по другую сторону от точки P она пересекается не более чем со 169 прямыми. Выбирая соответствующий луч на прямой ℓ, получаем противоречие. Следовательно, менее чем 341 прямой не обойтись.

Теперь приведём пример для 341 прямой. Рассмотрим окружность радиуса 1 с центром в точке P, впишем в неё правильный 341-угольник. Рассмотрим все «большие» диагонали этого 341-угольника (то есть такие диагонали, с одной стороны от которых 170 вершин многоугольника, а с другой — 169), и докажем, что множество прямых, содержащих эти диагонали, нам подходит. Для этого достаточно доказать, что любой луч, выходящий из P, пересекает хотя бы 170 диагоналей, а значит, и прямых, их содержащих.

Заметим, что все эти диагонали объединяются в замкнутую ломаную с вершинами в вершинах исходного 341-угольника (пример аналогичной ломаной для 15-угольника приведен на рис. 11). Эта ломаная «совершает вокруг точки P ровно 170 оборотов», следовательно, любой луч, выходящий из точки P, ломаная должна пересечь не менее 170 раз, что

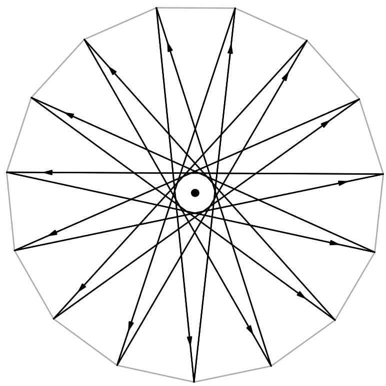


Рис. 11: к решению задачи 10.6

даёт не менее 170 пересечений со звеньями ломаной (если луч проходит через вершину ломаной, то он пересекает оба отрезка с этой вершиной).

Приведём более строгие формулировку утверждения об оборотах ломаной и обоснование последующего вывода. Каждому звену ломаной можно сопоставить дугу описанной окружности нашего 341-угольника, которая видна из точки P под тем же углом, что и само звено (рис. 12a). Так как это звено есть «большая» диагональ 341-угольника, то градусная мера такой дуги равна $\frac{170}{341} \cdot 360°$.

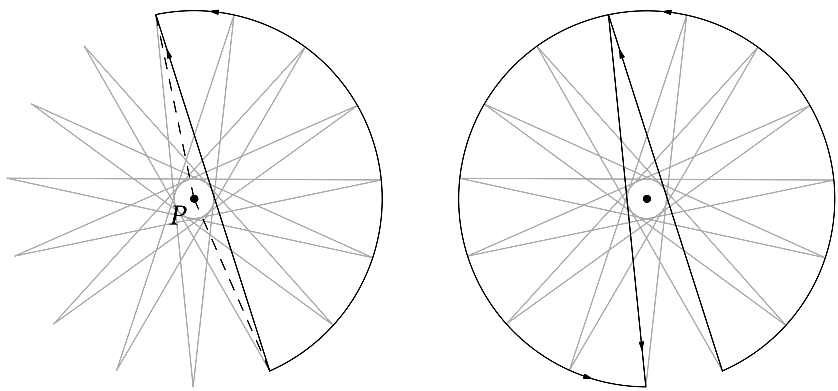


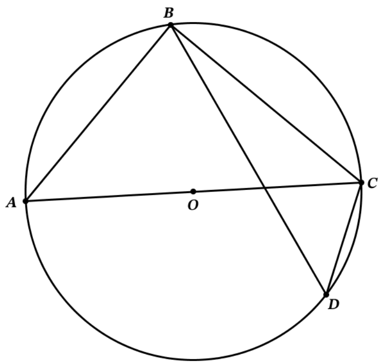
Рис. 12: к решению задачи 10.6

Ду́ги, соответствующие последовательным звеньям ломаной, стыкуются в обмотку окружности (рис. 12b). Таким образом, всей ломаной в целом сопоставляется замкнутая обмотка окружности с градусной мерой $341 \cdot \frac{170}{341} \cdot 360° = 170 \cdot 360°$, то есть 170 полных оборотов.

Следовательно, любой луч, выходящий из P, 170 раз пересечёт обмотку, а значит, не менее 170 раз пересечёт отдельные дуги (может получиться больше, если он пересечёт концы дуг). С другой стороны, из рис. 12а ясно, что если луч пересекает дугу, то он пересекает и соответствующую диагональ, а значит, и прямую, её содержащую. □

Замечание. В качестве примера также можно было выбрать прямые, содержащие стороны правильного 341-угольника с центром в точке P.

Задача 10.7. На окружности ω по разные стороны от диаметра AC расположены точки B и D. Известно, что $AB = 3\sqrt{6}$, $CD = 3$, а площадь треугольника ABC в три раза больше площади треугольника BCD. Найдите радиус окружности ω.



Ответ: 4,5.

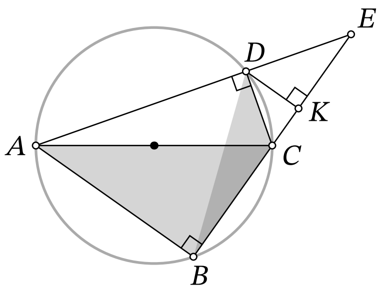


Рис. 13: к решению задачи 10.7

Решение. Заметим, что $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, поскольку AC — диаметр. Опустим из точки D перпендикуляр на BC, пусть его основание — точка K (рис. 13). Так как площадь треугольника ABC в 3 раза больше площади треугольника BCD, $DK = \frac{1}{3}AB = \sqrt{6}$. Из прямоугольного треугольника DCK по теореме Пифагора получаем

$$CK = \sqrt{CD^2 - DK^2} = \sqrt{9-6} = \sqrt{3}.$$

Продлим прямые BC и AD до пересечения в точке E (эти прямые не параллельны, так как иначе $ADKB$ был бы параллелограммом, но $DK \neq AB$). Так как DK — высота в прямоугольном треугольнике CDE, то $DK^2 = CK \cdot EK$. Таким образом, $EK = 2\sqrt{3}$.

Заметим, что прямоугольные треугольники ABE и DKE подобны по острому углу. Отсюда $BE : KE = AB : DK = 3 : 1$, то есть $BE = 6\sqrt{3}$. Получаем, что $BC = BE - CK - KE = 3\sqrt{3}$.

Остается ещё раз применить теорему Пифагора, получив

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 54 + 27 = 81,$$

откуда искомый радиус равен $\sqrt{81}\,/\,2 = 4{,}5$. □

Задача 10.8. Сколько существует троек натуральных чисел (a, b, c), удовлетворяющих равенству

$$\max(a, b) \cdot \max(c, 12) = \min(a, c) \cdot \min(b, 24)?$$

Здесь $\min(x, y)$ — это наименьшее из чисел x и y, а $\max(x, y)$ — наибольшее из чисел x и y.

Ответ: 455.

Решение. Заметим, что $\max(a, b) \geqslant b \geqslant \min(b, 24)$, а $\max(c, 12) \geqslant c \geqslant \min(a, c)$. Поскольку все числа натуральные, равенство в условии достигается только тогда, когда все неравенства обращаются в равенства: $\max(a, b) = b = \min(b, 24)$ и $\max(c, 12) = c = \min(a, c)$. Это равносильно тому, что

$$12 \leqslant c \leqslant a \leqslant b \leqslant 24.$$

Значит, в реальности нужно найти количество упорядоченных троек натуральных чисел в отрезке $[12; 24]$ (кстати, он содержит всего 13 натуральных чисел). По набору чисел, лежащих в этом отрезке, однозначно восстанавливается, чему равны a, b, c (ведь $c \leqslant a \leqslant b$). Какие бывают варианты?

1) Все три числа разные. Количество способов выбрать 3 различных числа из 13 равно $C_{13}^3 = 286$.

2) Какие-то два числа совпадают. Количество способов выбрать 2 различных числа равно $C_{13}^2 = 78$. При этом нужно ещё установить, какое именно из этих чисел встречается дважды, поэтому количество способов в этом случае равно $78 \cdot 2 = 156$.

3) Все три числа совпадают. Количество способов в этом случае — 13.

Итак, общее количество способов равно $286 + 156 + 13 = 455$. □

11 класс

Задача 11.1. Маша живёт в квартире №290, которая находится в 4-м подъезде 17-этажного дома. На каком этаже живёт Маша? (Количество квартир одинаково во всех подъездах дома на всех 17 этажах; номера квартир начинаются с 1.)

Ответ: 7.

Решение. Обозначим за x количество квартир на этаже, тогда в каждом подъезде $17x$ квартир. Таким образом, в первых трёх подъездах будет $51x$ квартир, а в первых четырёх — $68x$.

Если $x \geqslant 6$, то в первых трёх подъездах хотя бы 306 квартир, поэтому квартира №290 не может располагаться в четвёртом подъезде. А если $x \leqslant 4$, то в первых четырёх подъездах будет не больше 272 квартир, то есть снова квартира №290 не может располагаться в четвёртом подъезде. Остаётся единственный вариант, когда $x = 5$.

Тогда в первых трёх подъездах 255 квартир, а квартира №290 является 35-й в четвёртом подъезде, т. е. расположена на 7-м этаже. □

Задача 11.2. На столе лежат 30 монет: 23 десятирублёвых и 7 пятирублёвых, причём 20 из этих монет лежат вверх орлом, а остальные 10 — решкой. При каком наименьшем k среди произвольно выбранных k монет обязательно найдётся десятирублёвая монета, лежащая орлом вверх?

Ответ: 18.

Решение. Если выбрать 18 монет, то среди них окажется не более 10 лежащих решкой вверх, поэтому хотя бы 8 монет будут лежать орлом вверх. Среди этих монет не более 7 пятирублёвых, поэтому хотя бы одна будет десятирублёвой, она-то нам и подойдёт.

С другой стороны, если исходно на столе лежат 7 пятирублёвых монет орлом вверх, 10 десятирублёвых монет решкой вверх и 13 десятирублёвых монет орлом вверх, то среди 17 монет могут оказаться только монеты первых двух типов, поэтому 17 монет (или меньше) может не хватить. □

Задача 11.3. Произведение положительных чисел a и b равно 1. Известно, что

$$(3a + 2b)(3b + 2a) = 295.$$

Найдите $a + b$.

Ответ: 7.

Решение. Раскрыв скобки, получаем

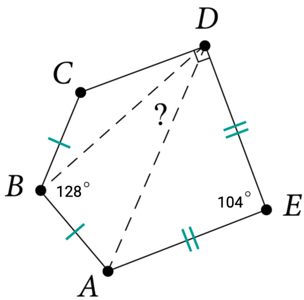
$$295 = 6a^2 + 6b^2 + 13ab = 6(a^2 + b^2) + 13,$$

откуда $a^2 + b^2 = 47$. Тогда

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 47 + 2 = 49 = 7^2,$$

что даёт $a + b = 7$ (отметим, что $a + b > 0$, поскольку $a > 0$ и $b > 0$). $\square$

Задача 11.4. Выпуклый пятиугольник $ABCDE$ таков, что $\angle ABC = 128°$, $\angle CDE = 90°$, $\angle AED = 104°$, $AB = BC$, $AE = ED$. Сколько градусов составляет угол ADB?



Ответ: 26.

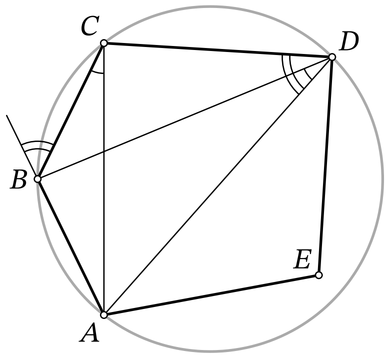


Рис. 14: к решению задачи 11.4

Решение. Углы при основании в равнобедренном треугольнике ABC равны по $\frac{1}{2}(180° - 128°) = 26°$, а в равнобедренном треугольнике AED — по $\frac{1}{2}(180° - 104°) = 38°$.

Заметим, что $\angle ADC = 90° - 38° = 52°$, и четырёхугольник $ABCD$ является вписанным (рис. 14), поскольку $\angle ABC + \angle ADC = 128° + 52° = 180°$. Тогда $\angle ADB = \angle ACB = 26°$. $\square$

Задача 11.5. При каком наименьшем натуральном n можно расставить числа от 1 до n по кругу так, чтобы каждое число было либо больше всех 40 следующих за ним по часовой стрелке, либо меньше всех 30 следующих за ним по часовой стрелке?

Ответ: 70.

Решение. Если $n \leqslant 39$, то для числа n условие выполняться не может: оно не может быть ни больше 40 следующих за ним чисел (ведь оно не больше самого себя), ни меньше 30 следующих за ним чисел (ведь оно наибольшее).

Если $40 \leqslant n \leqslant 69$, то для числа 40 условие выполняться не может: нет ни 40 чисел, меньших его, ни 30 чисел, бóльших его.

Если же $n = 70$, то числа расставить получится. Для этого можно поставить их в следующем порядке по часовой стрелке: 1, 2, 3, …, 40, 70, 69, 68, …, 41 (рис. 15). Тогда числа от 1 до 40 окажутся меньше следующих 30 за ними, а числа от 70 до 41 — больше следующих 40 за ними. ☐

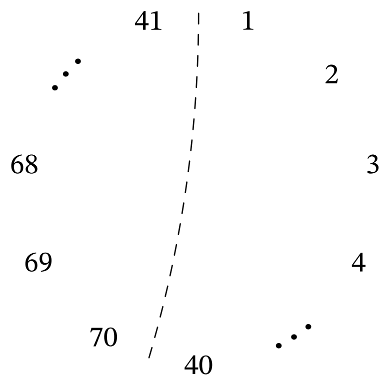


Рис. 15: к решению задачи 11.5

Задача 11.6. У многочлена $P(x)$ все коэффициенты — целые неотрицательные числа. Известно, что $P(1) = 4$ и $P(5) = 152$. Чему равно $P(11)$?

Ответ: 1454.

Решение. Предположим, степень многочлена P не меньше 4, тогда его старший коэффициент не меньше 1. Поскольку все остальные коэффициенты $P(x)$ неотрицательны, то $P(5) \geqslant 5^4 = 625$, что противоречит условию $P(5) = 152$.

Следовательно, степень многочлена P не больше 3, и $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ для некоторых целых неотрицательных a, b, c, d. Тогда

$$a + b + c + d = P(1) = 4, \qquad 125a + 25b + 5c + d = P(5) = 152.$$

Предположим, $a \geqslant 2$. Тогда $P(5) \geqslant 125 \cdot 2 = 250 > 152$, противоречие.

Предположим, $a = 0$. Тогда $P(5) = 25b + 5c + d \leqslant 25(b + c + d) = 25 \cdot 4 < 152$, противоречие.

Значит, $a = 1$. Тогда

$$b + c + d = 3, \qquad 25b + 5c + d = 27.$$

Предположим, $b \geqslant 2$. Тогда $25b + 5c + d \geqslant 25 \cdot 2 = 50 > 27$, противоречие.

Предположим, $b = 0$. Тогда $27 = 5c + d \leqslant 5(c + d) = 5 \cdot 3 < 27$, противоречие.

Значит, $b = 1$. Тогда

$$c + d = 2, \qquad 5c + d = 2.$$

Отсюда уже легко следует, что $c = 0$ и $d = 2$, т. е. $P(x) = x^3 + x^2 + 2$. Следовательно, $P(11) = 11^3 + 11^2 + 2 = 1454$. $\square$

Другое решение. Можно заметить, что $P(1) = 4$ — это в любом случае сумма коэффициентов многочлена $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, откуда каждый из них не превосходит 4. Тогда эти коэффициенты можно считать цифрами в пятеричной системе счисления, а значение многочлена в точке 5 — как раз число, записанное этими цифрами:

$$152 = P(5) = 5^n a_n + \ldots + 5a_1 + a_0.$$

Так как $152_{10} = 1102_5$, а представления чисел в пятеричной системе единственны, то $P(x) = 1x^3 + 1x^2 + 0x + 2$. $\square$

Задача 11.7. Центры шести сфер радиуса 1 расположены в вершинах правильного шестиугольника со стороной 2. Эти сферы внутренним образом касаются большой сферы S с центром в центре шестиугольника. Сфера P касается шести сфер внешним образом и сферы S внутренним образом. Чему равен радиус сферы P?

Ответ: 1,5.

Решение. Обозначим центры первых шести сфер A, B, …, F (в порядке, в котором они образуют шестиугольник), а плоскость шестиугольника α; центр сферы S (т. е. центр шестиугольника) — O, а её радиус — r; центр сферы P — Z, а её искомый радиус — z.

Сначала найдём радиус сферы S. Для этого рассмотрим сечение конструкции плоскостью α (рис. 16а). Точка касания S со сферой с центром A — обозначим эту точку за A_1 — лежит на прямой OA. Так как $AA_1 = 1$ и $OA_1 = r$, то $OA = r - 1$. С другой стороны, из свойств правильного шестиугольника ясно, что треугольники AOB, BOC, …, FOA равносторонние, то есть $OA = AB = 2$. Получаем $r = 3$.

Теперь рассмотрим сферу P. Из её касаний с шестью сферами следует, что расстояния от Z до точек A, B, …, F равны по $1 + z$. Это означает, что Z находится на перпендикуляре к α, проходящем через O (действительно, из равенств расстояний следует, что точки Z и O лежат на серединных перпендикулярах к отрезкам AD и BE, откуда прямая ZO перпендикулярна прямым AD и BE, а значит, и плоскости, их содержащей). Этот перпендикуляр является линией центров сфер S и P, поэтому на нём же лежит их точка касания — обозначим её X. Заметим, что из внутреннего касания S и P следует $OZ = OX - XZ = 3 - z$.

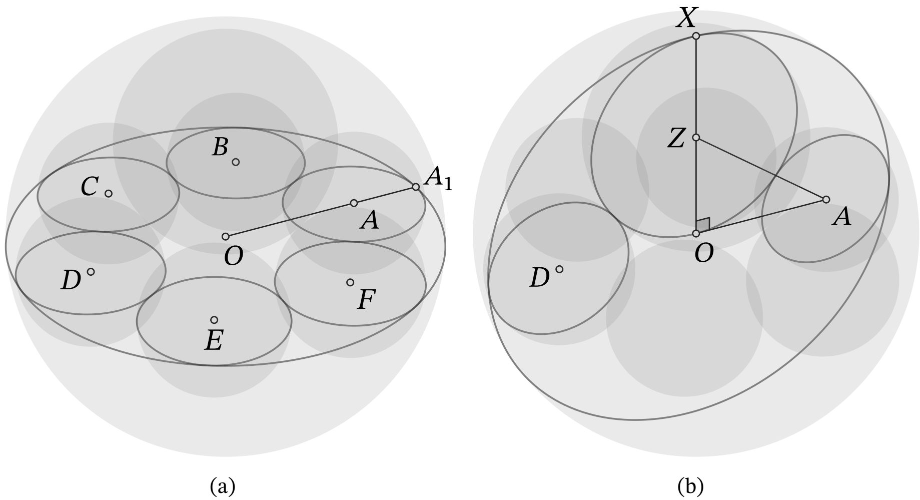


Рис. 16: к решению задачи 11.7

Рассмотрим треугольник AOZ (рис. 16b). Он прямоугольный, так как $OZ \perp \alpha$ и $\alpha \ni OA$. Мы знаем выражения всех его сторон через z; запишем теорему Пифагора:

$$\begin{gathered} ZA^2 = OA^2 + OZ^2 \quad \Rightarrow \\ (1+z)^2 = 2^2 + (3-z)^2 \quad \Rightarrow \\ 1 + 2z + z^2 = 4 + 9 - 6z + z^2 \quad \Rightarrow \\ 8z = 12. \end{gathered}$$

Отсюда $z = 1{,}5$. □

Задача 11.8. В таблице 28×35 некоторые k клеток покрашены в красный цвет, ещё r — в розовый, а оставшиеся s — в синий. Известно, что

- $k \geqslant r \geqslant s$;
- у каждой граничной клетки есть хотя бы 2 соседа такого же цвета;
- у каждой неграничной клетки есть хотя бы 3 соседа такого же цвета.

Какое наименьшее значение может принимать величина $k - s$?

(Клетка называется граничной, если она примыкает к границе таблицы. Соседями называются клетки, имеющие общую сторону.)

Ответ: 28.

Решение. Из условия легко понять, что у каждой клетки может быть не более одного соседа другого цвета.

Докажем, что раскраска таблицы должна быть «полосатой», то есть либо каждая строка, либо каждый столбец покрашены полностью в один цвет. Для этого достаточно показать, что либо все пары соседних клеток разного цвета являются соседями по горизонтали, либо все такие пары являются соседями по вертикали.

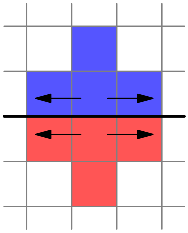


Рис. 17: к решению задачи 11.8

Рассмотрим любую пару соседних клеток разных цветов — если в таблице вообще есть клетки разных цветов, то такая найдётся. Остальные соседи этих клеток совпадают с ними по цвету, поэтому разделяющая цвета граница будет продолжаться в обе стороны (рис. 17), и далее, пока не упрётся в края таблицы.

Получаем, что любая граница между разными цветами должна идти от края до края таблицы, причём с каждой стороны от неё будет одноцветная полоса клеток. Но это означает, что вертикальная и горизонтальная границы одновременно существовать не могут. Следовательно, либо все границы горизонтальные, либо все границы вертикальные, и раскраска в любом случае «полосатая». (Ширина каждой полосы при этом должна быть не менее 2 клеток — впрочем, для решения это значения не имеет.)

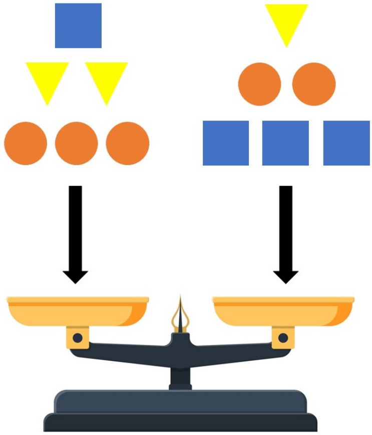
Это означает, что либо количества клеток каждого цвета делятся на высоту таблицы, либо на её ширину, как и разность $k-s$. С другой стороны, эта разность не может быть равна 0, так как в этом случае $k=r=s$ и общее количество клеток равно $3k$, но на 3 число $28\cdot 35$ не делится. Значит, $k-s\geqslant 28$ или $k-s\geqslant 35$.

Равенство $k-s=28$ возможно, если красные клетки занимают 12 столбцов (по 28 клеток), розовые столько же, а синие — 11 столбцов. Если столбцы одного цвета расположить подряд, то все условия задачи будут выполнены. □

Ответы

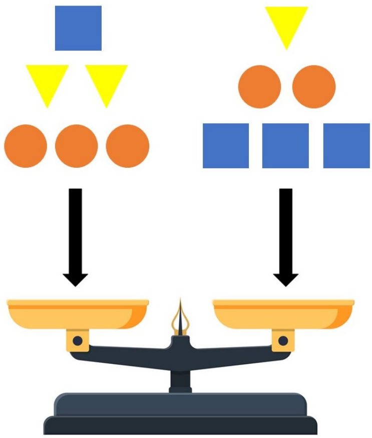
4 класс

Задача 4.1.1. Круглые гири весят 200 граммов, квадратные — 300 граммов, а треугольные — 150 граммов. 12 гирь положили на чашечные весы, как показано на рисунке. Какая чаша тяжелее и на сколько граммов?



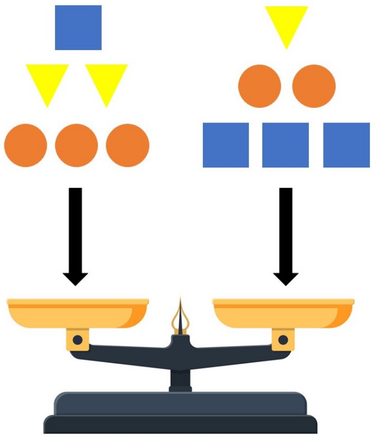
Ответ: Правая тяжелее на 250 граммов.

Задача 4.1.2. Круглые гири весят 200 граммов, квадратные — 350 граммов, а треугольные — 150 граммов. 12 гирь положили на чашечные весы, как показано на рисунке. Какая чаша тяжелее и на сколько граммов?



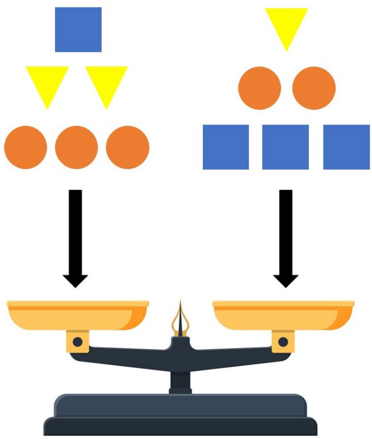
Ответ: Правая тяжелее на 350 граммов.

Задача 4.1.3. Круглые гири весят 150 граммов, квадратные — 300 граммов, а треугольные — 50 граммов. 12 гирь положили на чашечные весы, как показано на рисунке. Какая чаша тяжелее и на сколько граммов?



Ответ: Правая тяжелее на 400 граммов.

Задача 4.1.4. Круглые гири весят 250 граммов, квадратные — 350 граммов, а треугольные — 150 граммов. 12 гирь положили на чашечные весы, как показано на рисунке. Какая чаша тяжелее и на сколько граммов?



Ответ: Правая тяжелее на 300 граммов.

Задача 4.2.1. В 4«А» классе у каждого ребёнка есть не менее 11 одноклассников и не менее 13 одноклассниц. Какое наименьшее количество детей может учиться в этом классе?

Ответ: 26.

Задача 4.2.2. В 4«А» классе у каждого ребёнка есть не менее 12 одноклассников и не менее 13 одноклассниц. Какое наименьшее количество детей может учиться в этом классе?

Ответ: 27.

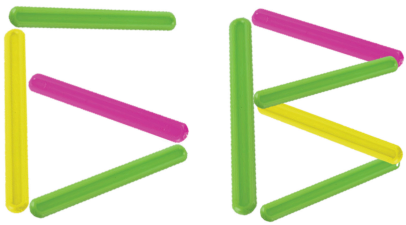
Задача 4.2.3. В 4«А» классе у каждого ребёнка есть не менее 12 одноклассников и не менее 14 одноклассниц. Какое наименьшее количество детей может учиться в этом классе?

Ответ: 28.

Задача 4.2.4. В 4«А» классе у каждого ребёнка есть не менее 13 одноклассников и не менее 14 одноклассниц. Какое наименьшее количество детей может учиться в этом классе?

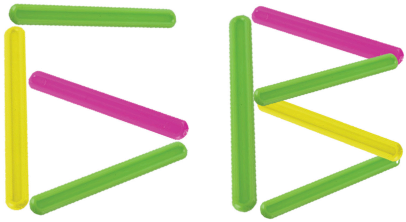
Ответ: 29.

Задача 4.3.1. У Саши было 47 палочек. Использовав их все, он сложил несколько букв «Б» и «В», изображённых на рисунке. Какое наибольшее количество букв «Б» могло получиться у Саши?



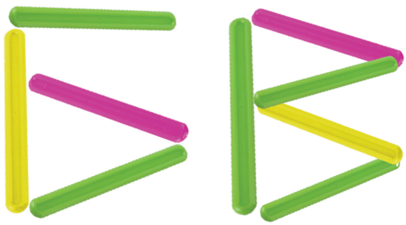
Ответ: 8.

Задача 4.3.2. У Саши было 43 палочки. Использовав их все, он сложил несколько букв «Б» и «В», изображённых на рисунке. Какое наибольшее количество букв «Б» могло получиться у Саши?



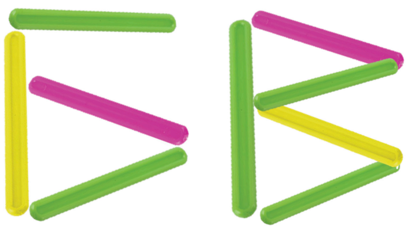
Ответ: 7.

Задача 4.3.3. У Саши было 39 палочек. Использовав их все, он сложил несколько букв «Б» и «В», изображённых на рисунке. Какое наибольшее количество букв «Б» могло получиться у Саши?



Ответ: 6.

Задача 4.3.4. У Саши было 51 палочка. Использовав их все, он сложил несколько букв «Б» и «В», изображённых на рисунке. Какое наибольшее количество букв «Б» могло получиться у Саши?



Ответ: 9.

Задача 4.4.1. Коты Леопольд, Гарфилд, Василий, Матильда и Том съели на кухне две котлеты, две сосиски и одну рыбу. Каждый из них съел что-то одно. Известно, что:

- Леопольд, Гарфилд и Том съели 3 разных блюда;

- Василий не ел котлету, а Леопольд не ел сосиску;
- Гарфилд и Матильда съели одно и то же.

Кому что досталось?

Ответ: Гарфилду и Матильде — котлеты, Василию и Тому — сосиски, Леопольду — рыба.

Задача 4.4.2. Коты Леопольд, Гарфилд, Василий, Матильда и Том съели на кухне две котлеты, две сосиски и одну рыбу. Каждый из них съел что-то одно. Известно, что:

- Гарфилд, Василий и Леопольд съели 3 разных блюда;
- Матильда не ела котлету, а Гарфилд не ел сосиску;
- Василий и Том съели одно и то же.

Кому что досталось?

Ответ: Василию и Тому — котлеты, Матильде и Леопольду — сосиски, Гарфилду — рыба.

Задача 4.4.3. Коты Леопольд, Гарфилд, Василий, Матильда и Том съели на кухне две котлеты, две сосиски и одну рыбу. Каждый из них съел что-то одно. Известно, что:

- Том, Леопольд и Матильда съели 3 разных блюда;
- Гарфилд не ел котлету, а Том не ел сосиску;
- Леопольд и Василий съели одно и то же.

Кому что досталось?

Ответ: Леопольду и Василию — котлеты, Гарфилду и Матильде — сосиски, Тому — рыба.

Задача 4.4.4. Коты Леопольд, Гарфилд, Василий, Матильда и Том съели на кухне две котлеты, две сосиски и одну рыбу. Каждый из них съел что-то одно. Известно, что:

- Василий, Матильда и Гарфилд съели 3 разных блюда;
- Том не ел котлету, а Василий не ел сосиску;
- Матильда и Леопольд съели одно и то же.

Кому что досталось?

Ответ: Матильде и Леопольду — котлеты, Тому и Гарфилду — сосиски, Василию — рыба.

Задача 4.5.1. У мамы с папой есть двое детей: Коля и Таня. Папа старше мамы на 4 года. Коля тоже старше Тани на 4 года и вдвое младше папы. Сколько лет каждому из них, если суммарный возраст всех членов семьи составляет 130 лет?

Ответ: Тане 19 лет, Коле 23 года, маме 42 года, папе 46 лет.

Задача 4.5.2. У мамы с папой есть двое детей: Коля и Таня. Папа старше мамы на 4 года. Коля тоже старше Тани на 4 года и вдвое младше папы. Сколько лет каждому из них, если суммарный возраст всех членов семьи составляет 124 года?

Ответ: Тане 18 лет, Коле 22 года, маме 40 лет, папе 44 года.

Задача 4.5.3. У мамы с папой есть двое детей: Коля и Таня. Папа старше мамы на 4 года. Коля тоже старше Тани на 4 года и вдвое младше папы. Сколько лет каждому из них, если суммарный возраст всех членов семьи составляет 136 лет?

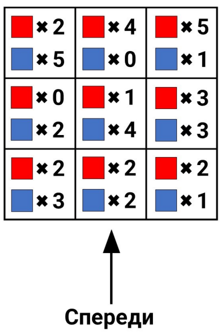
Ответ: Тане 20 лет, Коле 24 года, маме 44 года, папе 48 лет.

Задача 4.5.4. У мамы с папой есть двое детей: Коля и Таня. Папа старше мамы на 4 года. Коля тоже старше Тани на 4 года и вдвое младше папы. Сколько лет каждому из них, если суммарный возраст всех членов семьи составляет 142 года?

Ответ: Тане 21 год, Коле 25 лет, маме 46 лет, папе 50 лет.

Задача 4.6.1. Женя взял доску 3×3 и на каждую клетку поставил столбик из синих и красных кубиков. Потом он зарисовал схему получившейся расстановки: подписал количество кубиков обоих цветов в каждом столбике (порядок кубиков неизвестен).

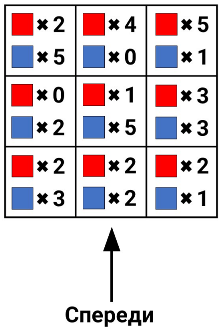
Какое наибольшее количество синих кубиков может увидеть Женя, если посмотрит на конструкцию спереди? (Например, если перед столбиком из 8 кубиков стоит столбик из 5, то будет видно все 5 кубиков ближнего столбика и только 3 верхних кубика дальнего столбика.)



Ответ: 12.

Задача 4.6.2. Женя взял доску 3×3 и на каждую клетку поставил столбик из синих и красных кубиков. Потом он зарисовал схему получившейся расстановки: подписал количество кубиков обоих цветов в каждом столбике (порядок кубиков неизвестен).

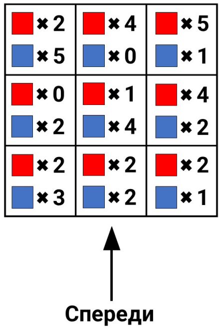
Какое наибольшее количество синих кубиков может увидеть Женя, если посмотрит на конструкцию спереди? (Например, если перед столбиком из 8 кубиков стоит столбик из 5, то будет видно все 5 кубиков ближнего столбика и только 3 верхних кубика дальнего столбика.)



Ответ: 13.

Задача 4.6.3. Женя взял доску 3×3 и на каждую клетку поставил столбик из синих и красных кубиков. Потом он зарисовал схему получившейся расстановки: подписал количество кубиков обоих цветов в каждом столбике (порядок кубиков неизвестен).

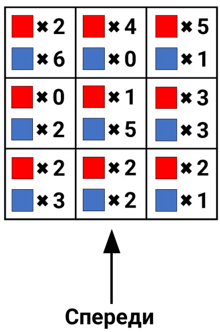
Какое наибольшее количество синих кубиков может увидеть Женя, если посмотрит на конструкцию спереди? (Например, если перед столбиком из 8 кубиков стоит столбик из 5, то будет видно все 5 кубиков ближнего столбика и только 3 верхних кубика дальнего столбика.)



Ответ: 11.

Задача 4.6.4. Женя взял доску 3×3 и на каждую клетку поставил столбик из синих и красных кубиков. Потом он зарисовал схему получившейся расстановки: подписал количество кубиков обоих цветов в каждом столбике (порядок кубиков неизвестен).

Какое наибольшее количество синих кубиков может увидеть Женя, если посмотрит на конструкцию спереди? (Например, если перед столбиком из 8 кубиков стоит столбик из 5, то будет видно все 5 кубиков ближнего столбика и только 3 верхних кубика дальнего столбика.)



Ответ: 14.

Задача 4.7.1. На столе лежит 4 стопки монет. В первой стопке 9 монет, во второй — 7, в третьей — 5, в четвёртой — 10. За один ход разрешается добавить по одной монете к трём разным стопкам. За какое наименьшее количество ходов можно добиться того, чтобы во всех стопках стало поровну монет?

Ответ: 11.

Задача 4.7.2. На столе лежит 4 стопки монет. В первой стопке 9 монет, во второй — 7, в третьей — 5, в четвёртой — 11. За один ход разрешается добавить по одной монете к трём разным стопкам. За какое наименьшее количество ходов можно добиться того, чтобы во всех стопках стало поровну монет?

Ответ: 12.

Задача 4.7.3. На столе лежит 4 стопки монет. В первой стопке 9 монет, во второй — 8, в третьей — 5, в четвёртой — 11. За один ход разрешается добавить по одной монете к трём разным стопкам. За какое наименьшее количество ходов можно добиться того, чтобы во всех стопках стало поровну монет?

Ответ: 13.

Задача 4.7.4. На столе лежит 4 стопки монет. В первой стопке 8 монет, во второй — 7, в третьей — 5, в четвёртой — 10. За один ход разрешается добавить по одной монете к трём разным стопкам. За какое наименьшее количество ходов можно добиться того, чтобы во всех стопках стало поровну монет?

Ответ: 10.

Задача 4.8.1. У Васи есть шесть одинаковых игральных кубиков, на гранях каждого из которых записаны числа от 1 до 6 (каждое — по одному разу). Вася бросал все шесть кубиков шесть раз подряд. Ни на одном из кубиков не выпадало дважды одно и то же число.

Известно, что при первом броске сумма чисел на верхних гранях равнялась 21, а при следующих четырёх бросках — 19, 20, 18 и 25. Какая сумма получилась при шестом броске?

Ответ: 23.

Задача 4.8.2. У Васи есть шесть одинаковых игральных кубиков, на гранях каждого из которых записаны числа от 1 до 6 (каждое — по одному разу). Вася бросал все шесть кубиков шесть раз подряд. Ни на одном из кубиков не выпадало дважды одно и то же число.

Известно, что при первом броске сумма чисел на верхних гранях равнялась 22, а при следующих четырёх бросках — 15, 19, 21 и 24. Какая сумма получилась при шестом броске?

Ответ: 25.

Задача 4.8.3. У Васи есть шесть одинаковых игральных кубиков, на гранях каждого из которых записаны числа от 1 до 6 (каждое — по одному разу). Вася бросал все шесть кубиков шесть раз подряд. Ни на одном из кубиков не выпадало дважды одно и то же число.

Известно, что при первом броске сумма чисел на верхних гранях равнялась 24, а при следующих четырёх бросках — 16, 15, 20 и 27. Какая сумма получилась при шестом броске?

Ответ: 24.

Задача 4.8.4. У Васи есть шесть одинаковых игральных кубиков, на гранях каждого из которых записаны числа от 1 до 6 (каждое — по одному разу). Вася бросал все шесть кубиков шесть раз подряд. Ни на одном из кубиков не выпадало дважды одно и то же число.

Известно, что при первом броске сумма чисел на верхних гранях равнялась 26, а при следующих четырёх бросках — 17, 18, 16 и 23. Какая сумма получилась при шестом броске?

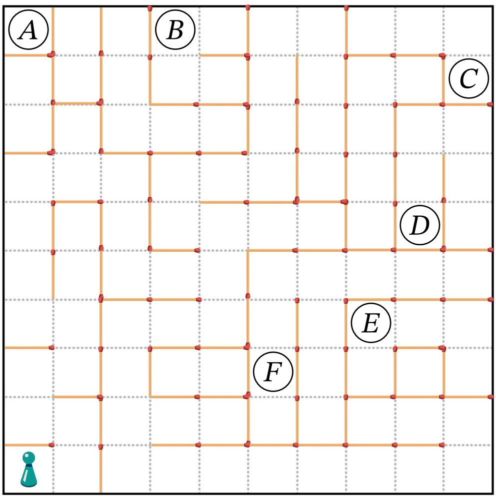
Ответ: 26.

5 класс

Задача 5.1.1. На некоторые границы клеток доски 10×10 положили спички, а в одну из клеток — фишку, как показано на рисунке. За один ход фишку можно передвигать в соседнюю по стороне клетку, перепрыгивать через спичку запрещено.

Клетка называется *достижимой*, если в неё можно попасть за несколько ходов из клетки X, убрав с доски не более одной спички.

Среди 6 клеток с кружочками выберите все, являющиеся достижимыми.

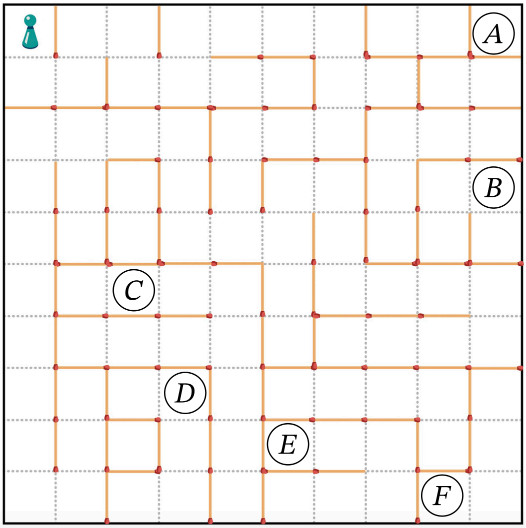


Ответ: B, C, E, F.

Задача 5.1.2. На некоторые границы клеток доски 10×10 положили спички, а в одну из клеток — фишку, как показано на рисунке. За один ход фишку можно передвигать в соседнюю по стороне клетку, перепрыгивать через спичку запрещено.

Клетка называется *достижимой*, если в неё можно попасть за несколько ходов из клетки X, убрав с доски не более одной спички.

Среди 6 клеток с кружочками выберите все, являющиеся достижимыми.

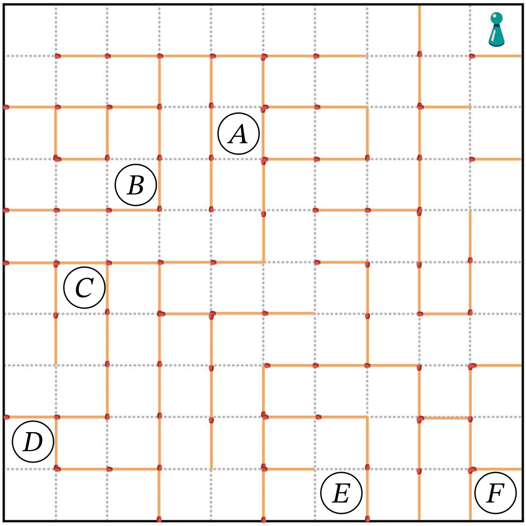


Ответ: B, C, D, F.

Задача 5.1.3. На некоторые границы клеток доски 10×10 положили спички, а в одну из клеток — фишку, как показано на рисунке. За один ход фишку можно передвигать в соседнюю по стороне клетку, перепрыгивать через спичку запрещено.

Клетка называется *достижимой*, если в неё можно попасть за несколько ходов из клетки X, убрав с доски не более одной спички.

Среди 6 клеток с кружочками выберите все, являющиеся достижимыми.

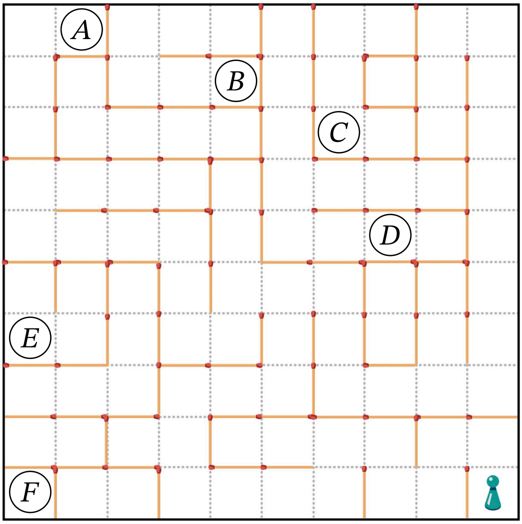


Ответ: A, B, D, E.

Задача 5.1.4. На некоторые границы клеток доски 10×10 положили спички, а в одну из клеток — фишку, как показано на рисунке. За один ход фишку можно передвигать в соседнюю по стороне клетку, перепрыгивать через спичку запрещено.

Клетка называется *достижимой*, если в неё можно попасть за несколько ходов из клетки X, убрав с доски не более одной спички.

Среди 6 клеток с кружочками выберите все, являющиеся достижимыми.



Ответ: A, C, D, E.

Задача 5.2.1. На уроке физкультуры в шеренгу встали 25 учеников 5«Б» класса. Каждый из ребят либо отличник, который всегда говорит правду, либо хулиган, который всегда врёт.

Отличник Влад встал на 13-е место. Все, кроме Влада, заявили: «Между мной и Владом ровно 6 хулиганов.» Сколько всего хулиганов в шеренге?

Ответ: 12.

Задача 5.2.2. На уроке физкультуры в шеренгу встали 25 учеников 5«Б» класса. Каждый из ребят либо отличник, который всегда говорит правду, либо хулиган, который всегда врёт.

Отличник Влад встал на 13-е место. Все, кроме Влада, заявили: «Между мной и Владом ровно 7 хулиганов.» Сколько всего хулиганов в шеренге?

Ответ: 14.

Задача 5.2.3. На уроке физкультуры в шеренгу встали 25 учеников 5«Б» класса. Каждый из ребят либо отличник, который всегда говорит правду, либо хулиган, который всегда врёт.

Отличник Влад встал на 13-е место. Все, кроме Влада, заявили: «Между мной и Владом ровно 8 хулиганов.» Сколько всего хулиганов в шеренге?

Ответ: 16.

Задача 5.2.4. На уроке физкультуры в шеренгу встали 25 учеников 5«Б» класса. Каждый из ребят либо отличник, который всегда говорит правду, либо хулиган, который всегда врёт.

Отличник Влад встал на 13-е место. Все, кроме Влада, заявили: «Между мной и Владом ровно 9 хулиганов.» Сколько всего хулиганов в шеренге?

Ответ: 18.

Задача 5.3.1. Петя и Вася играли в солдатиков. Петя выстроил своих рыцарей «прямоугольником» — сколько-то колонн и сколько-то рядов. Когда все рыцари из первого и второго ряда ушли в разведку, то рыцарей осталось 24. Затем Васины лучники обратили в бегство всех рыцарей, которые остались в первой и второй колоннах. После этого осталось 18 рыцарей. Сколько рыцарей было у Пети изначально?

Ответ: 40.

Задача 5.3.2. Петя и Вася играли в солдатиков. Петя выстроил своих рыцарей «прямоугольником» — сколько-то колонн и сколько-то рядов. Когда все рыцари из первого и второго ряда ушли в разведку, то рыцарей осталось 27. Затем Васины лучники обратили в бегство всех рыцарей, которые остались в первой и второй колоннах. После этого остался 21 рыцарь. Сколько рыцарей было у Пети изначально?

Ответ: 45.

Задача 5.3.3. Петя и Вася играли в солдатиков. Петя выстроил своих рыцарей «прямоугольником» — сколько-то колонн и сколько-то рядов. Когда все рыцари из первого и второго ряда ушли в разведку, то рыцарей осталось 30. Затем Васины лучники обратили в бегство всех рыцарей, которые остались в первой и второй колоннах. После этого осталось 24 рыцаря. Сколько рыцарей было у Пети изначально?

Ответ: 50.

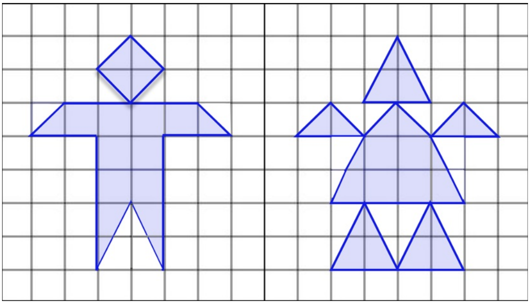
Задача 5.3.4. Петя и Вася играли в солдатиков. Петя выстроил своих рыцарей «прямоугольником» — сколько-то колонн и сколько-то рядов. Когда все рыцари из первого и второго ряда ушли в разведку, то рыцарей осталось 21. Затем Васины лучники обратили в бегство всех рыцарей, которые остались в первой и второй колоннах. После этого осталось 15 рыцарей. Сколько рыцарей было у Пети изначально?

Ответ: 35.

Задача 5.4.1. Маша нарисовала в тетради двух человечков. Площадь каждой клеточки равна 1.

Площадь какого из человечков больше?

Чему равна разница? Если площади одинаковы, в ответ запишите «0».

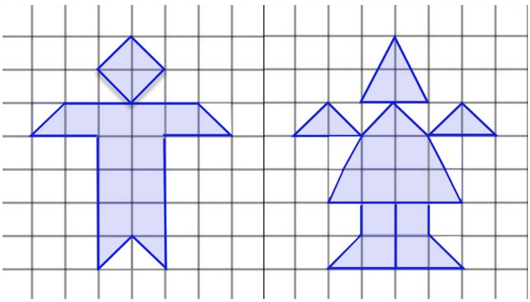


Ответ: Площадь второго (правого) человечка на 2 больше.

Задача 5.4.2. Маша нарисовала в тетради двух человечков. Площадь каждой клеточки равна 1.

Площадь какого из человечков больше?

Чему равна разница? Если площади одинаковы, в ответ запишите «0».

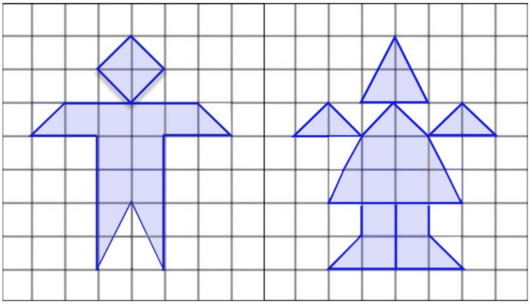


Ответ: Площадь второго (правого) человечка на 2 больше.

Задача 5.4.3. Маша нарисовала в тетради двух человечков. Площадь каждой клеточки равна 1.

Площадь какого из человечков больше?

Чему равна разница? Если площади одинаковы, в ответ запишите «0».

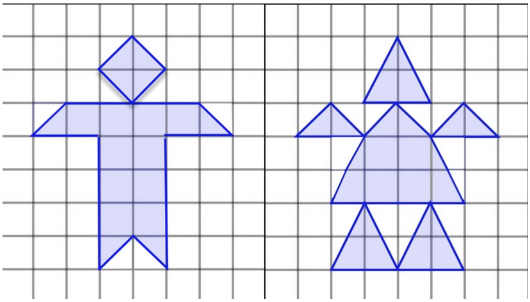


Ответ: Площадь второго (правого) человечка на 3 больше.

Задача 5.4.4. Маша нарисовала в тетради двух человечков. Площадь каждой клеточки равна 1.

Площадь какого из человечков больше?

Чему равна разница? Если площади одинаковы, в ответ запишите «0».



Ответ: Площадь второго (правого) человечка на 1 больше.

Задача 5.5.1. У Дениса есть одинаковые десятирублёвые монеты, одинаковые двухрублёвые и одинаковые однорублёвые монеты (монет каждого вида больше 20). Сколькими способами он сможет заплатить без сдачи за пирожок стоимостью 16 рублей?

Не обязательно использовать монеты каждого вида.

Ответ: 13.

Задача 5.5.2. У Дениса есть одинаковые десятирублёвые монеты, одинаковые двухрублёвые и одинаковые однорублёвые монеты (монет каждого вида больше 20). Сколькими способами он сможет заплатить без сдачи за пирожок стоимостью 14 рублей?

Не обязательно использовать монеты каждого вида.

Ответ: 11.

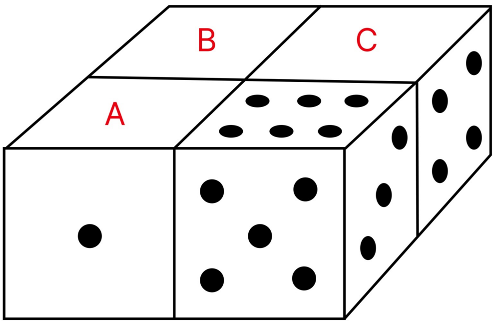
Задача 5.5.3. У Дениса есть одинаковые десятирублёвые монеты, одинаковые двухрублёвые и одинаковые однорублёвые монеты (монет каждого вида больше 20). Сколькими способами он сможет заплатить без сдачи за пирожок стоимостью 18 рублей?

Не обязательно использовать монеты каждого вида.

Ответ: 15.

Задача 5.6.1. Есть 4 абсолютно одинаковых кубика, у каждого из которых на одной грани отмечены 6 точек, на другой — 5, ..., на оставшейся — 1. Известно, что на любых двух противоположных гранях кубика суммарно 7 точек.

Из этих 4 кубиков склеили фигуру, изображённую на рисунке. Известно, что на каждой паре склеенных граней отмечено одинаковое количество точек. Сколько точек на гранях A, B, C?



Точек на грани A: ....

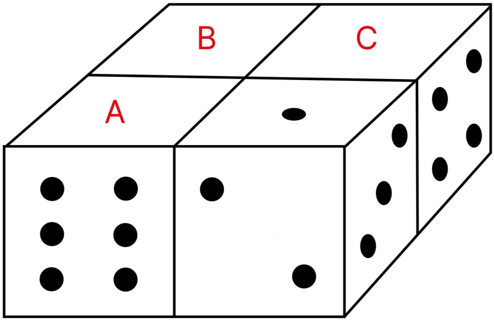
Точек на грани B: ....

Точек на грани C: ....

Ответ: $A = 2$, $B = 2$, $C = 6$.

Задача 5.6.2. Есть 4 абсолютно одинаковых кубика, у каждого из которых на одной грани отмечены 6 точек, на другой — 5, ..., на оставшейся — 1. Известно, что на любых двух противоположных гранях кубика суммарно 7 точек.

Из этих 4 кубиков склеили фигуру, изображённую на рисунке. Известно, что на каждой паре склеенных граней отмечено одинаковое количество точек. Сколько точек на гранях A, B, C?



Точек на грани A: ....

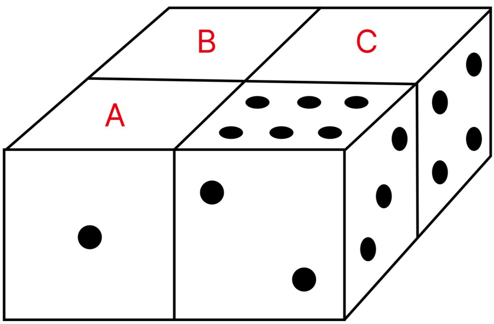
Точек на грани B: ....

Точек на грани C: ....

Ответ: $A = 5, B = 5, C = 1$.

Задача 5.6.3. Есть 4 абсолютно одинаковых кубика, у каждого из которых на одной грани отмечены 6 точек, на другой — 5, ..., на оставшейся — 1. Известно, что на любых двух противоположных гранях кубика суммарно 7 точек.

Из этих 4 кубиков склеили фигуру, изображённую на рисунке. Известно, что на каждой паре склеенных граней отмечено одинаковое количество точек. Сколько точек на гранях A, B, C?



Точек на грани A: ....

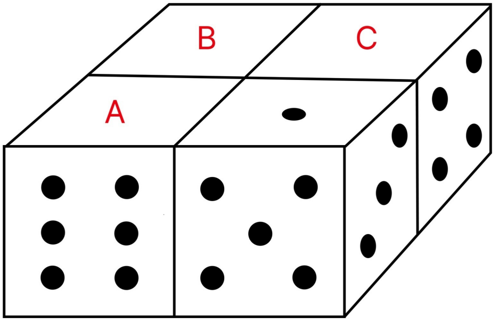
Точек на грани B: ....

Точек на грани C: ....

Ответ: $A = 5, B = 5, C = 6$.

Задача 5.6.4. Есть 4 абсолютно одинаковых кубика, у каждого из которых на одной грани отмечены 6 точек, на другой — 5, ..., на оставшейся — 1. Известно, что на любых двух противоположных гранях кубика суммарно 7 точек.

Из этих 4 кубиков склеили фигуру, изображённую на рисунке. Известно, что на каждой паре склеенных граней отмечено одинаковое количество точек. Сколько точек на гранях A, B, C?



Точек на грани A: ....

Точек на грани B: ....

Точек на грани C: ....

Ответ: $A = 2$, $B = 2$, $C = 1$.

Задача 5.7.1. В классе 31 ученик. У трёх из них ровно по три друга, у следующих трёх — по шесть, у следующих трёх — по девять, ..., у следующих трёх — по тридцать. Сколько друзей у 31-го ученика? (Дружба между людьми взаимна.)

Ответ: 15.

Задача 5.7.2. В классе 25 учеников. У трёх из них ровно по три друга, у следующих трёх — по шесть, у следующих трёх — по девять, ..., у следующих трёх — по двадцать четыре. Сколько друзей у 25-го ученика? (Дружба между людьми взаимна.)

Ответ: 12.

Задача 5.7.3. В классе 37 учеников. У трёх из них ровно по три друга, у следующих трёх — по шесть, у следующих трёх — по девять, ..., у следующих трёх — по тридцать шесть. Сколько друзей у 37-го ученика? (Дружба между людьми взаимна.)

Ответ: 18.

Задача 5.8.1. В многодетной семье Ивановых нет близнецов. Репортёр приехал к Ивановым, чтобы взять у них интервью.

Во время интервью каждый из детей сказал: «У меня есть старший брат». Немного подумав, репортёр очень удивился. Но отец семейства объяснил, что некоторые дети пошутили, и лишь шестеро сказали правду. Сколько детей может быть в этой семье, если известно, что мальчиков у Ивановых на 4 больше, чем девочек? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 8, 10.

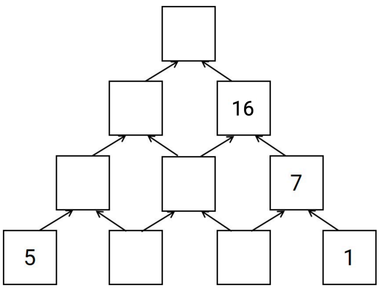
Задача 5.8.2. В многодетной семье Ивановых нет близнецов. Репортёр приехал к Ивановым, чтобы взять у них интервью.

Во время интервью каждый из детей сказал: «У меня есть старший брат». Немного подумав, репортёр очень удивился. Но отец семейства объяснил, что некоторые дети пошутили, и лишь четверо сказали правду. Сколько детей может быть в этой семье, если известно, что мальчиков у Ивановых на 2 больше, чем девочек? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 6, 8.

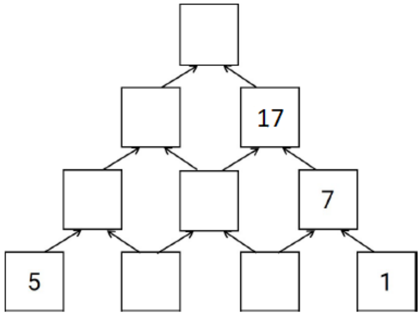
6 класс

Задача 6.1.1. Клеточки пирамиды заполнили по следующему правилу: над каждыми двумя соседними числами записали их сумму. Некоторые числа стёрли, и получилась конструкция, изображённая на рисунке. Какое число было в самой верхней клеточке?



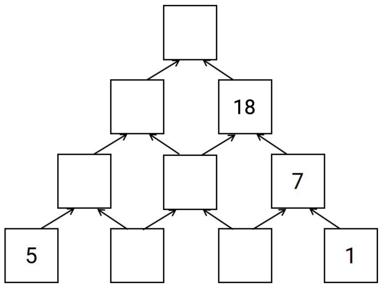
Ответ: 33.

Задача 6.1.2. Клеточки пирамиды заполнили по следующему правилу: над каждыми двумя соседними числами записали их сумму. Некоторые числа стёрли, и получилась конструкция, изображённая на рисунке. Какое число было в самой верхней клеточке?



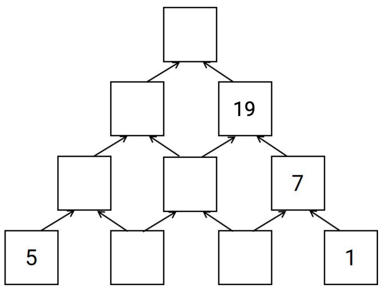
Ответ: 36.

Задача 6.1.3. Клеточки пирамиды заполнили по следующему правилу: над каждыми двумя соседними числами записали их сумму. Некоторые числа стёрли, и получилась конструкция, изображённая на рисунке. Какое число было в самой верхней клеточке?



Ответ: 39.

Задача 6.1.4. Клеточки пирамиды заполнили по следующему правилу: над каждыми двумя соседними числами записали их сумму. Некоторые числа стёрли, и получилась конструкция, изображённая на рисунке. Какое число было в самой верхней клеточке?



Ответ: 42.

Задача 6.2.1. Петя и Вася решили получить как можно больше пятёрок за 1 и 2 сентября.

- 1 сентября они суммарно получили 10 пятёрок, причём Петя получил пятёрок больше, чем Вася;
- 2 сентября Вася получил 3 пятёрки, а Петя не получил ни одной;
- по итогам этих двух дней Вася получил больше пятёрок, чем Петя.

Кто сколько пятёрок получил за эти два дня?

Ответ: Петя получил 6 пятёрок, а Вася — 7.

Задача 6.2.2. Петя и Вася решили получить как можно больше пятёрок за 1 и 2 сентября.

- 1 сентября они суммарно получили 8 пятёрок, причём Петя получил пятёрок больше, чем Вася;
- 2 сентября Вася получил 3 пятёрки, а Петя не получил ни одной;
- по итогам этих двух дней Вася получил больше пятёрок, чем Петя.

Кто сколько пятёрок получил за эти два дня?

Ответ: Петя получил 5 пятёрок, а Вася — 6.

Задача 6.2.3. Петя и Вася решили получить как можно больше пятёрок за 1 и 2 сентября.

- 1 сентября они суммарно получили 10 пятёрок, причём Вася получил пятёрок больше, чем Петя;
- 2 сентября Петя получил 3 пятёрки, а Вася не получил ни одной;
- по итогам этих двух дней Петя получил больше пятёрок, чем Вася.

Кто сколько пятёрок получил за эти два дня?

Ответ: Петя получил 7 пятёрок, а Вася — 6.

Задача 6.2.4. Петя и Вася решили получить как можно больше пятёрок за 1 и 2 сентября.

- 1 сентября они суммарно получили 8 пятёрок, причём Вася получил пятёрок больше, чем Петя;
- 2 сентября Петя получил 3 пятёрки, а Вася не получил ни одной;
- по итогам этих двух дней Петя получил больше пятёрок, чем Вася.

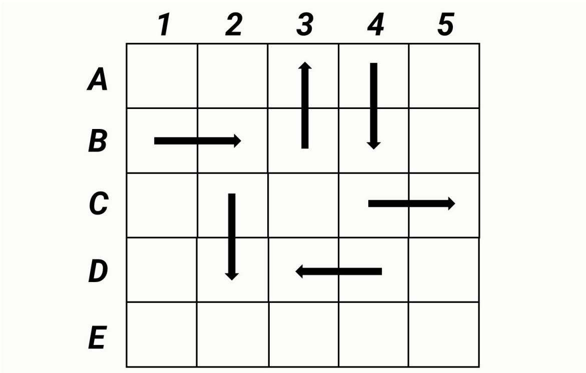
Кто сколько пятёрок получил за эти два дня?

Ответ: Петя получил 6 пятёрок, а Вася — 5.

Задача 6.3.1. Фишку поставили на некоторую клетку доски 5×5. Передвигая фишку на соседнюю по стороне клетку, обошли всю доску за исключением одной клетки и вернулись на стартовую позицию. В каждой клетке, кроме начальной, фишка побывала не более одного раза.

На рисунке изображены стрелочки, показывающие, куда передвигали фишку из некоторых клеток.

Выберите на картинке клетку, в которую фишка *не* заходила.

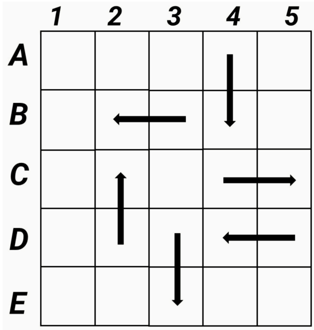


Ответ: $C1$.

Задача 6.3.2. Фишку поставили на некоторую клетку доски 5×5. Передвигая фишку на соседнюю по стороне клетку, обошли всю доску за исключением одной клетки и вернулись на стартовую позицию. В каждой клетке, кроме начальной, фишка побывала не более одного раза.

На рисунке изображены стрелочки, показывающие, куда передвигали фишку из некоторых клеток.

Выберите на картинке клетку, в которую фишка *не* заходила.



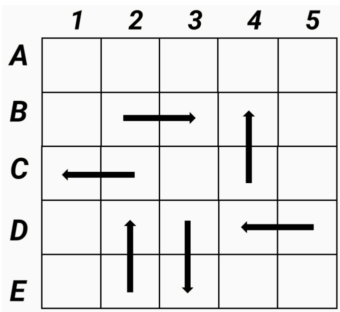
(ПРИМЕЧАНИЕ ОТ АВТОРОВ. В формулировке в системе Сириуса в конце надо «Для выбора клетки нажмите на кружочек внутри неё.».)

Ответ: $a3$.

Задача 6.3.3. Фишку поставили на некоторую клетку доски 5×5. Передвигая фишку на соседнюю по стороне клетку, обошли всю доску за исключением одной клетки и вернулись на стартовую позицию. В каждой клетке, кроме начальной, фишка побывала не более одного раза.

На рисунке изображены стрелочки, показывающие, куда передвигали фишку из некоторых клеток.

Выберите на картинке клетку, в которую фишка *не* заходила.



(ПРИМЕЧАНИЕ ОТ АВТОРОВ. В формулировке в системе Сириуса в конце надо «Для выбора клетки нажмите на кружочек внутри неё.».)

Ответ: $C5$.

Задача 6.4.1. На клавиатуре компьютера не работает клавиша с цифрой 1. Например, если попытаться напечатать число 1231234, то пропечатается только число 23234.

Саша попытался напечатать 8-значное число, но пропечаталось только 202020. Сколько существует 8-значных чисел, подходящих под это условие?

Ответ: 28.

Задача 6.4.2. На клавиатуре компьютера не работает клавиша с цифрой 1. Например, если попытаться напечатать число 1231234, то пропечатается только число 23234.

Саша попытался напечатать 8-значное число, но пропечаталось только 303030. Сколько существует 8-значных чисел, подходящих под это условие?

Ответ: 28.

Задача 6.4.3. На клавиатуре компьютера не работает клавиша с цифрой 1. Например, если попытаться напечатать число 1231234, то пропечатается только число 23234.

Саша попытался напечатать 8-значное число, но пропечаталось только 404040. Сколько существует 8-значных чисел, подходящих под это условие?

Ответ: 28.

Задача 6.4.4. На клавиатуре компьютера не работает клавиша с цифрой 1. Например, если попытаться напечатать число 1231234, то пропечатается только число 23234.

Саша попытался напечатать 8-значное число, но пропечаталось только 505050. Сколько существует 8-значных чисел, подходящих под это условие?

Ответ: 28.

Задача 6.5.1. На прямой отмечены 5 точек P, Q, R, S, T, именно в таком порядке. Известно, что сумма расстояний от P до остальных 4 точек равна 67, а сумма расстояний от Q до остальных 4 точек равна 34. Найдите длину отрезка PQ.

Ответ: 11.

Задача 6.5.2. На прямой отмечены 5 точек P, Q, R, S, T, именно в таком порядке. Известно, что сумма расстояний от P до остальных 4 точек равна 71, а сумма расстояний от Q до остальных 4 точек равна 35. Найдите длину отрезка PQ.

Ответ: 12.

Задача 6.5.3. На прямой отмечены 5 точек P, Q, R, S, T, именно в таком порядке. Известно, что сумма расстояний от P до остальных 4 точек равна 75, а сумма расстояний от Q до остальных 4 точек равна 36. Найдите длину отрезка PQ.

Ответ: 13.

Задача 6.5.4. На прямой отмечены 5 точек P, Q, R, S, T, именно в таком порядке. Известно, что сумма расстояний от P до остальных 4 точек равна 79, а сумма расстояний от Q до остальных 4 точек равна 37. Найдите длину отрезка PQ.

Ответ: 14.

Задача 6.6.1. Женя покрасил три грани белого кубика $6 \times 6 \times 6$ в красный цвет. Затем он распилил его на 216 одинаковых маленьких кубиков $1 \times 1 \times 1$. Сколько у него могло получиться маленьких кубиков без красных граней? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 120, 125.

Задача 6.6.2. Женя покрасил три грани белого кубика $5 \times 5 \times 5$ в красный цвет. Затем он распилил его на 125 одинаковых маленьких кубиков $1 \times 1 \times 1$. Сколько у него могло получиться маленьких кубиков без красных граней? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 60, 64.

Задача 6.7.1. Амурский и бенгальский тигры начали бегать по кругу в 12:00, каждый со своей постоянной скоростью. К 14:00 амурский тигр пробежал на 6 кругов больше бенгальского. Затем амурский тигр увеличил свою скорость на 10 км/ч, и к 15:00 он суммарно пробежал уже на 17 кругов больше бенгальского. Сколько метров составляет длина круга?

Ответ: 1250.

Задача 6.7.2. Амурский и бенгальский тигры начали бегать по кругу в 12:00, каждый со своей постоянной скоростью. К 14:00 амурский тигр пробежал на 6 кругов больше бенгальского. Затем амурский тигр увеличил свою скорость на 12 км/ч, и к 15:00 он суммарно пробежал уже на 17 кругов больше бенгальского. Сколько метров составляет длина круга?

Ответ: 1500.

Задача 6.7.3. Амурский и бенгальский тигры начали бегать по кругу в 12:00, каждый со своей постоянной скоростью. К 14:00 амурский тигр пробежал на 6 кругов больше бенгальского. Затем амурский тигр увеличил свою скорость на 12 км/ч, и к 15:00 он суммарно пробежал уже на 19 кругов больше бенгальского. Сколько метров составляет длина круга?

Ответ: 1200.

Задача 6.7.4. Амурский и бенгальский тигры начали бегать по кругу в 12:00, каждый со своей постоянной скоростью. К 14:00 амурский тигр пробежал на 6 кругов больше бенгальского. Затем амурский тигр увеличил свою скорость на 8 км/ч, и к 15:00 он суммарно пробежал уже на 19 кругов больше бенгальского. Сколько метров составляет длина круга?

Ответ: 800.

Задача 6.8.1. В 6 «А» классе учатся несколько мальчиков и девочек. Известно, что в 6 «А»

- девочка Таня дружит с 12 мальчиками;
- девочка Даша дружит с 12 мальчиками;
- девочка Катя дружит с 13 мальчиками;
- у любой девочки найдётся друг среди любых трёх мальчиков.

Сколько мальчиков может быть в 6 «А» классе? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 13, 14.

Задача 6.8.2. В 6 «А» классе учатся несколько мальчиков и девочек. Известно, что в 6 «А»

- девочка Таня дружит с 11 мальчиками;
- девочка Даша дружит с 11 мальчиками;
- девочка Катя дружит с 12 мальчиками;
- у любой девочки найдётся друг среди любых трёх мальчиков.

Сколько мальчиков может быть в 6 «А» классе? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 12, 13.

Задача 6.8.3. В 6 «А» классе учатся несколько мальчиков и девочек. Известно, что в 6 «А»

- девочка Таня дружит с 13 мальчиками;
- девочка Даша дружит с 13 мальчиками;
- девочка Катя дружит с 14 мальчиками;
- у любой девочки найдётся друг среди любых трёх мальчиков.

Сколько мальчиков может быть в 6 «А» классе? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 14, 15.

Задача 6.8.4. В 6 «А» классе учатся несколько мальчиков и девочек. Известно, что в 6 «А»

- девочка Таня дружит с 14 мальчиками;
- девочка Даша дружит с 14 мальчиками;
- девочка Катя дружит с 15 мальчиками;
- у любой девочки найдётся друг среди любых трёх мальчиков.

Сколько мальчиков может быть в 6 «А» классе? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 15, 16.

7 класс

Задача 7.1.1. Решите ребус

$$C{,}BA + A{,}AA = B{,}A.$$

(Разными буквами обозначены разные цифры, одинаковыми буквами — одинаковые цифры.)

Ответ: $A = 5$, $B = 9$, $C = 3$.

Задача 7.1.2. Решите ребус

$$A{,}CB + B{,}BB = C{,}B.$$

(Разными буквами обозначены разные цифры, одинаковыми буквами — одинаковые цифры.)

Ответ: $A = 3$, $B = 5$, $C = 9$.

Задача 7.1.3. Решите ребус

$$B{,}AC + C{,}CC = A{,}C.$$

(Разными буквами обозначены разные цифры, одинаковыми буквами — одинаковые цифры.)

Ответ: $A = 9$, $B = 3$, $C = 5$.

Задача 7.2.1. Влад и Дима решили подзаработать. Каждый из них решил положить по 3000 рублей в банк, а через год все деньги снять.

Влад выбрал вклад «Уверенность»: за год сумма увеличивается на 20%, но при снятии банк взимает комиссию 10%.

Дима выбрал вклад «Надёжность»: за год сумма увеличивается на 40%, но при снятии банк взимает комиссию 20%.

(«Банк взимает комиссию $n\%$» означает то, что банк оставляет себе $n\%$ от текущей величины вклада, а оставшуюся часть вклада возвращает его владельцу.)

Кто получит большую годовую прибыль от вклада?

Чему будет равна разница? Ответ выразите в рублях. Если прибыль одинакова, то запишите 0.

Ответ: Дима заработает больше на 120 рублей.

Задача 7.2.2. Влад и Дима решили подзаработать. Каждый из них решил положить по 2000 рублей в банк, а через год все деньги снять.

Влад выбрал вклад «Уверенность»: за год сумма увеличивается на 20%, но при снятии банк взимает комиссию 10%.

Дима выбрал вклад «Надёжность»: за год сумма увеличивается на 40%, но при снятии банк взимает комиссию 20%.

(«Банк взимает комиссию $n\%$» означает то, что банк оставляет себе $n\%$ от текущей величины вклада, а оставшуюся часть вклада возвращает его владельцу.)

Кто получит большую годовую прибыль от вклада?

Чему будет равна разница? Ответ выразите в рублях. Если прибыль одинакова, то запишите 0.

Ответ: Дима заработает больше на 80 рублей.

Задача 7.2.3. Влад и Дима решили подзаработать. Каждый из них решил положить по 4000 рублей в банк, а через год все деньги снять.

Влад выбрал вклад «Уверенность»: за год сумма увеличивается на 20%, но при снятии банк взимает комиссию 10%.

Дима выбрал вклад «Надёжность»: за год сумма увеличивается на 40%, но при снятии банк взимает комиссию 20%.

(«Банк взимает комиссию $n\%$» означает то, что банк оставляет себе $n\%$ от текущей величины вклада, а оставшуюся часть вклада возвращает его владельцу.)

Кто получит большую годовую прибыль от вклада?

Чему будет равна разница? Ответ выразите в рублях. Если прибыль одинакова, то запишите 0.

Ответ: Дима заработает больше на 160 рублей.

Задача 7.2.4. Влад и Дима решили подзаработать. Каждый из них решил положить по 6000 рублей в банк, а через год все деньги снять.

Влад выбрал вклад «Уверенность»: за год сумма увеличивается на 20%, но при снятии банк взимает комиссию 10%.

Дима выбрал вклад «Надёжность»: за год сумма увеличивается на 40%, но при снятии банк взимает комиссию 20%.

(«Банк взимает комиссию $n\%$» означает то, что банк оставляет себе $n\%$ от текущей величины вклада, а оставшуюся часть вклада возвращает его владельцу.)

Кто получит большую годовую прибыль от вклада?

Чему будет равна разница? Ответ выразите в рублях. Если прибыль одинакова, то запишите 0.

Ответ: Дима заработает больше на 240 рублей.

Задача 7.3.1. Смешарики Крош, Ёжик, Нюша и Бараш суммарно съели 86 конфет, причём каждый из них съел не менее 5 конфет. Известно, что:

- Нюша съела конфет больше, чем каждый из остальных смешариков;
- Крош и Ёжик суммарно съели 53 конфеты.

Сколько конфет съела Нюша?

Ответ: 28.

Задача 7.3.2. Смешарики Крош, Ёжик, Нюша и Бараш суммарно съели 89 конфет, причём каждый из них съел не менее 5 конфет. Известно, что:

- Нюша съела конфет больше, чем каждый из остальных смешариков;
- Крош и Ёжик суммарно съели 55 конфет.

Сколько конфет съела Нюша?

Ответ: 29.

Задача 7.3.3. Смешарики Крош, Ёжик, Нюша и Бараш суммарно съели 83 конфеты, причём каждый из них съел не менее 5 конфет. Известно, что:

- Нюша съела конфет больше, чем каждый из остальных смешариков;
- Крош и Ёжик суммарно съели 51 конфету.

Сколько конфет съела Нюша?

Ответ: 27.

Задача 7.3.4. Смешарики Крош, Ёжик, Нюша и Бараш суммарно съели 80 конфет, причём каждый из них съел не менее 5 конфет. Известно, что:

- Нюша съела конфет больше, чем каждый из остальных смешариков;
- Крош и Ёжик суммарно съели 49 конфет.

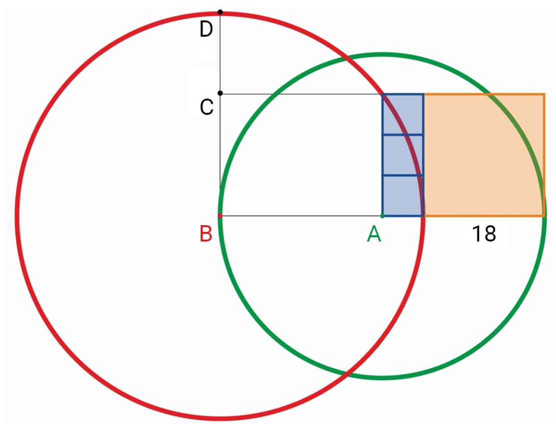
Сколько конфет съела Нюша?

Ответ: 26.

Задача 7.4.1. На рисунке ниже

- три синие фигуры — квадраты;
- оранжевая фигура — квадрат со стороной 18;
- точка A — центр зелёной окружности;
- точка B — центр красной окружности.

Найдите длину отрезка CD.



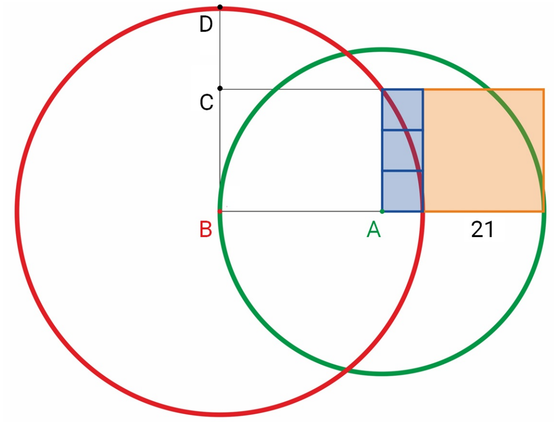
Ответ: 12.

Задача 7.4.2. На рисунке ниже

- три синие фигуры — квадраты;
- оранжевая фигура — квадрат со стороной 21;
- точка A — центр зелёной окружности;

- точка B — центр красной окружности.

Найдите длину отрезка CD.

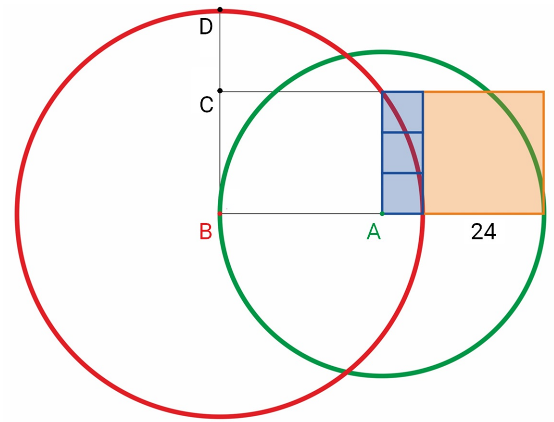


Ответ: 14.

Задача 7.4.3. На рисунке ниже

- три синие фигуры — квадраты;
- оранжевая фигура — квадрат со стороной 24;
- точка A — центр зелёной окружности;
- точка B — центр красной окружности.

Найдите длину отрезка CD.

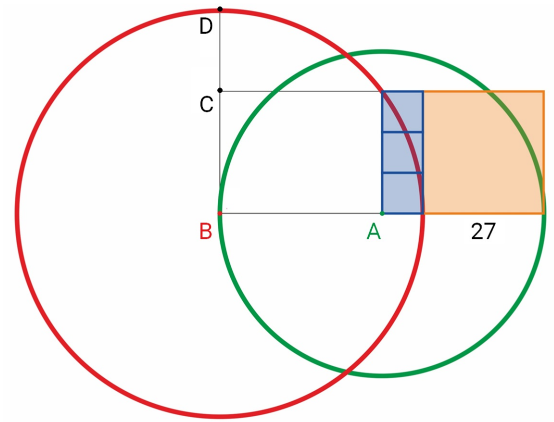


Ответ: 16.

Задача 7.4.4. На рисунке ниже

- три синие фигуры — квадраты;
- оранжевая фигура — квадрат со стороной 27;
- точка A — центр зелёной окружности;
- точка B — центр красной окружности.

Найдите длину отрезка CD.



Ответ: 18.

Задача 7.5.1. В магазине продаются орехи четырёх видов: фундук, миндаль, кешью и фисташки. Степан хочет купить 1 килограмм орехов одного вида и ещё 1 килограмм орехов — другого. Он вычислил, во сколько ему может обойтись такая покупка в зависимости от того, какие два вида орехов он выберет. Пять из шести возможных покупок Степана стоили бы 1900, 2070, 2110, 2330 и 2500 рублей. Сколько рублей составляет стоимость шестой возможной покупки?

Ответ: 2290.

Задача 7.5.2. В магазине продаются орехи четырёх видов: фундук, миндаль, кешью и фисташки. Степан хочет купить 1 килограмм орехов одного вида и ещё 1 килограмм орехов — другого. Он вычислил, во сколько ему может обойтись такая покупка в зависимости от того, какие два вида орехов он выберет. Пять из шести возможных покупок Степана стоили бы 1900, 2070, 2110, 2320 и 2490 рублей. Сколько рублей составляет стоимость шестой возможной покупки?

Ответ: 2280.

Задача 7.5.3. В магазине продаются орехи четырёх видов: фундук, миндаль, кешью и фисташки. Степан хочет купить 1 килограмм орехов одного вида и ещё 1 килограмм орехов — другого. Он вычислил, во сколько ему может обойтись такая покупка в зависимости от того, какие два вида орехов он выберет. Пять из шести возможных покупок Степана стоили бы 1900, 2070, 2110, 2310 и 2480 рублей. Сколько рублей составляет стоимость шестой возможной покупки?

Ответ: 2270.

Задача 7.5.4. В магазине продаются орехи четырёх видов: фундук, миндаль, кешью и фисташки. Степан хочет купить 1 килограмм орехов одного вида и ещё 1 килограмм орехов — другого. Он вычислил, во сколько ему может обойтись такая покупка в зависимости от того, какие два вида орехов он выберет. Пять из шести возможных покупок Степана стоили бы 1900, 2070, 2110, 2300 и 2470 рублей. Сколько рублей составляет стоимость шестой возможной покупки?

Ответ: 2260.

Задача 7.6.1. Магический квадрат — это таблица 3×3, в которой расставлены числа так, что суммы по всем строкам, столбцам и двум главным диагоналям одинаковы. На рисунке изображён магический квадрат, в котором все числа, кроме трёх, стёрты. Найдите, чему равно число в левом верхнем углу квадрата.

?	31	9
13		

Ответ: 14.

Задача 7.6.2. Магический квадрат — это таблица 3×3, в которой расставлены числа так, что суммы по всем строкам, столбцам и двум главным диагоналям одинаковы. На рисунке изображён магический квадрат, в котором все числа, кроме трёх, стёрты. Найдите, чему равно число в левом верхнем углу квадрата.

?	29	9
13		

Ответ: 13.

Задача 7.6.3. Магический квадрат — это таблица 3×3, в которой расставлены числа так, что суммы по всем строкам, столбцам и двум главным диагоналям одинаковы. На рисунке изображён магический квадрат, в котором все числа, кроме трёх, стёрты. Найдите, чему равно число в левом верхнем углу квадрата.

?	31	11
15		

Ответ: 15.

Задача 7.6.4. Магический квадрат — это таблица 3×3, в которой расставлены числа так, что суммы по всем строкам, столбцам и двум главным диагоналям одинаковы. На рисунке изображён магический квадрат, в котором все числа, кроме трёх, стёрты. Найдите, чему равно число в левом верхнем углу квадрата.

?	30	9
14		

Ответ: 12.

Задача 7.7.1. Все 25 учеников 7«А» класса участвовали в викторине из трёх туров. В каждом туре каждый участник набрал некоторое количество очков. Известно, что в каждом туре, а также по сумме всех трёх туров все участники набрали различное количество очков.

Ученик 7«А» Коля в первом туре викторины оказался третьим, во втором — четвёртым, а в третьем — пятым. Какое самое низкое место мог занять Коля среди всех одноклассников по сумме очков за все три тура викторины?

Ответ: 10.

Задача 7.7.2. Все 25 учеников 7«А» класса участвовали в викторине из трёх туров. В каждом туре каждый участник набрал некоторое количество очков. Известно, что в каждом туре, а также по сумме всех трёх туров все участники набрали различное количество очков.

Ученик 7«А» Коля в первом туре викторины оказался третьим, во втором — четвёртым, а в третьем — шестым. Какое самое низкое место мог занять Коля среди всех одноклассников по сумме очков за все три тура викторины?

Ответ: 11.

Задача 7.7.3. Все 25 учеников 7«А» класса участвовали в викторине из трёх туров. В каждом туре каждый участник набрал некоторое количество очков. Известно, что в каждом туре, а также по сумме всех трёх туров все участники набрали различное количество очков.

Ученик 7«А» Коля в первом туре викторины оказался третьим, во втором — пятым, а в третьем — шестым. Какое самое низкое место мог занять Коля среди всех одноклассников по сумме очков за все три тура викторины?

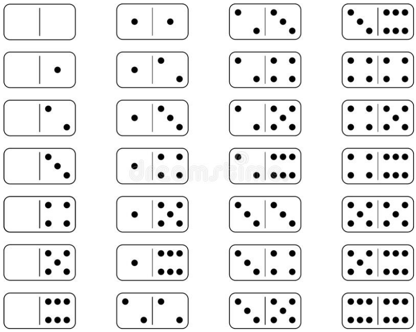
Ответ: 12.

Задача 7.7.4. Все 25 учеников 7«А» класса участвовали в викторине из трёх туров. В каждом туре каждый участник набрал некоторое количество очков. Известно, что в каждом туре, а также по сумме всех трёх туров все участники набрали различное количество очков.

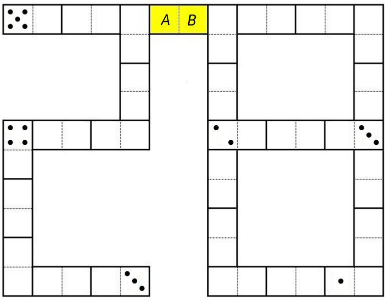
Ученик 7«А» Коля в первом туре викторины оказался четвёртым, во втором — пятым, а в третьем — шестым. Какое самое низкое место мог занять Коля среди всех одноклассников по сумме очков за все три тура викторины?

Ответ: 13.

Задача 7.8.1. Набор из 28 различных доминошек выглядит так:



Все эти 28 доминошек выложили так, что количество точек на соприкасающихся половинках доминошек одинаково. На некоторых половинках полностью стёрли количество точек. В итоге получилась конструкция, изображённая на рисунке ниже (пустые половинки могли быть изначально пустыми, а могли содержать какое-то количество точек).



Сколько точек на каждой из половинок жёлтой костяшки?

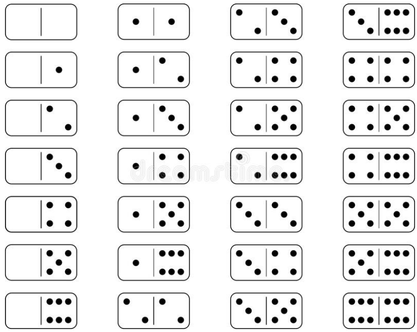
Точек на половинке A: ....

Точек на половинке B: ....

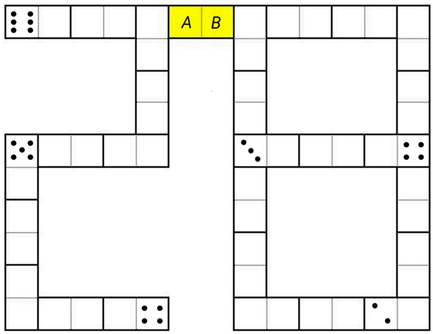
(ПРИМЕЧАНИЕ ОТ АВТОРОВ. Нижнюю картинку надо перерисовать, вместо цифр надо вставить соответствующее количество точек, как на реальных доминошках.)

Ответ: $A = 2, B = 5$.

Задача 7.8.2. Набор из 28 различных доминошек выглядит так:



Все эти 28 доминошек выложили так, что количество точек на соприкасающихся половинках доминошек одинаково. На некоторых половинках полностью стёрли количество точек. В итоге получилась конструкция, изображённая на рисунке ниже (пустые половинки могли быть изначально пустыми, а могли содержать какое-то количество точек).



Сколько точек на каждой из половинок жёлтой костяшки?

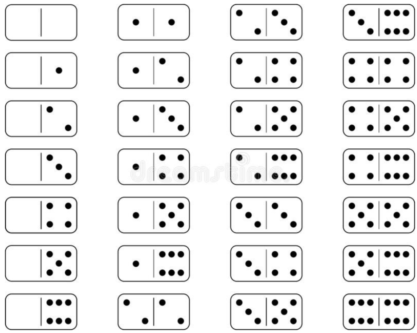
Точек на половинке A: ....

Точек на половинке B: ....

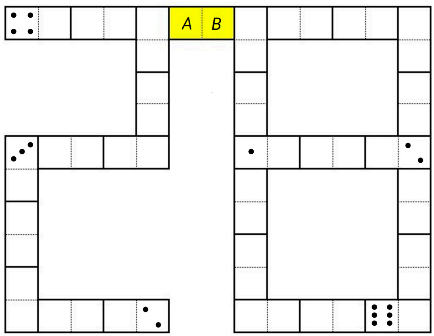
(ПРИМЕЧАНИЕ ОТ АВТОРОВ. Нижнюю картинку надо перерисовать, вместо цифр надо вставить соответствующее количество точек, как на реальных доминошках.)

Ответ: $A = 3, B = 6$.

Задача 7.8.3. Набор из 28 различных доминошек выглядит так:



Все эти 28 доминошек выложили так, что количество точек на соприкасающихся половинках доминошек одинаково. На некоторых половинках полностью стёрли количество точек. В итоге получилась конструкция, изображённая на рисунке ниже (пустые половинки могли быть изначально пустыми, а могли содержать какое-то количество точек).



Сколько точек на каждой из половинок жёлтой костяшки?

Точек на половинке A: ....

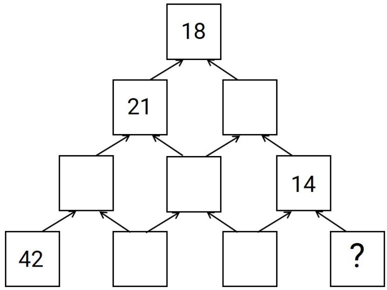
Точек на половинке B: ....

(ПРИМЕЧАНИЕ ОТ АВТОРОВ. Нижнюю картинку надо перерисовать, вместо цифр надо вставить соответствующее количество точек, как на реальных доминошках.)

Ответ: $A = 1, B = 4$.

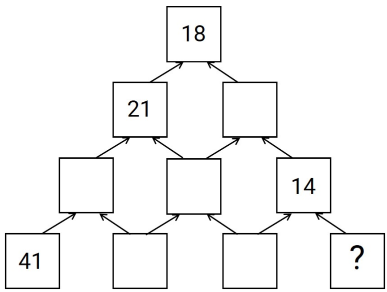
8 класс

Задача 8.1.1. Клетки пирамиды заполнили по следующему правилу: над каждыми двумя соседними числами записали их среднее арифметическое. Некоторые числа стёрли, и получилась конструкция, изображённая на рисунке. Какое число было в правой нижней клетке? (Среднее арифметическое двух чисел — это их сумма, разделённая на 2.)



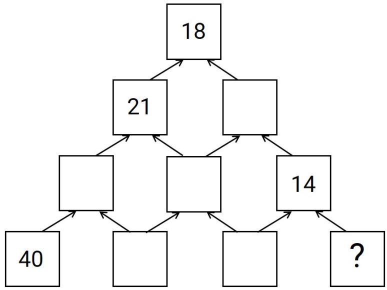
Ответ: 6.

Задача 8.1.2. Клетки пирамиды заполнили по следующему правилу: над каждыми двумя соседними числами записали их среднее арифметическое. Некоторые числа стёрли, и получилась конструкция, изображённая на рисунке. Какое число было в правой нижней клетке? (Среднее арифметическое двух чисел — это их сумма, разделённая на 2.)



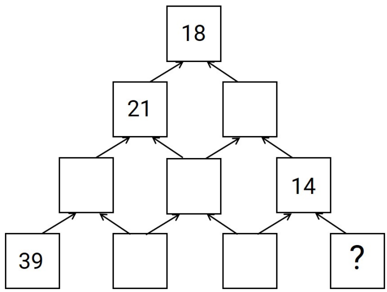
Ответ: 7.

Задача 8.1.3. Клетки пирамиды заполнили по следующему правилу: над каждыми двумя соседними числами записали их среднее арифметическое. Некоторые числа стёрли, и получилась конструкция, изображённая на рисунке. Какое число было в правой нижней клетке? (Среднее арифметическое двух чисел — это их сумма, разделённая на 2.)



Ответ: 8.

Задача 8.1.4. Клетки пирамиды заполнили по следующему правилу: над каждыми двумя соседними числами записали их среднее арифметическое. Некоторые числа стёрли, и получилась конструкция, изображённая на рисунке. Какое число было в правой нижней клетке? (Среднее арифметическое двух чисел — это их сумма, разделённая на 2.)



Ответ: 9.

Задача 8.2.1. Малыши Коля и Маша учатся считать. В первую секунду Коля назвал число 1, во вторую — 2, в третью — 3 и т. д. Если Маше нравится число, названное Колей, то она записывает его себе в тетрадь, в конец текущей строки (одно число за другим, без пробелов и запятых). Спустя n секунд у Маши в тетради оказалось записано

$$2726252423.$$

Какое наименьшее значение может принимать n?

Ответ: 423.

Задача 8.2.2. Малыши Коля и Маша учатся считать. В первую секунду Коля назвал число 1, во вторую — 2, в третью — 3 и т. д. Если Маше нравится число, названное Колей, то она записывает его себе в тетрадь, в конец текущей строки (одно число за другим, без пробелов и запятых). Спустя n секунд у Маши в тетради оказалось записано

$$1615141312.$$

Какое наименьшее значение может принимать n?

Ответ: 312.

Задача 8.2.3. Малыши Коля и Маша учатся считать. В первую секунду Коля назвал число 1, во вторую — 2, в третью — 3 и т. д. Если Маше нравится число, названное Колей, то она записывает его себе в тетрадь, в конец текущей строки (одно число за другим, без пробелов и запятых). Спустя n секунд у Маши в тетради оказалось записано

$$3837363534.$$

Какое наименьшее значение может принимать n?

Ответ: 534.

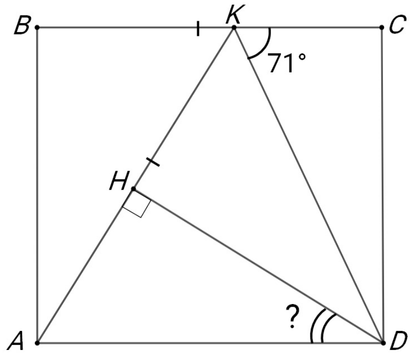
Задача 8.2.4. Малыши Коля и Маша учатся считать. В первую секунду Коля назвал число 1, во вторую — 2, в третью — 3 и т. д. Если Маше нравится число, названное Колей, то она записывает его себе в тетрадь, в конец текущей строки (одно число за другим, без пробелов и запятых). Спустя n секунд у Маши в тетради оказалось записано

$$4948474645.$$

Какое наименьшее значение может принимать n?

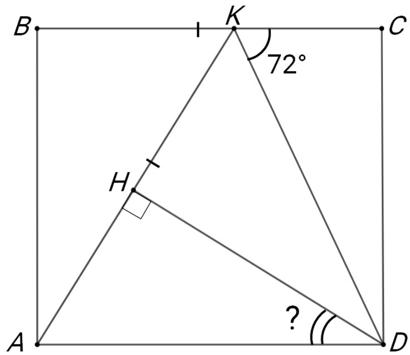
Ответ: 645.

Задача 8.3.1. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ отмечена точка K. Точка H на отрезке AK такова, что $\angle AHD = 90°$. Оказалось, что $AK = BC$. Сколько градусов составляет угол ADH, если $\angle CKD = 71°$?



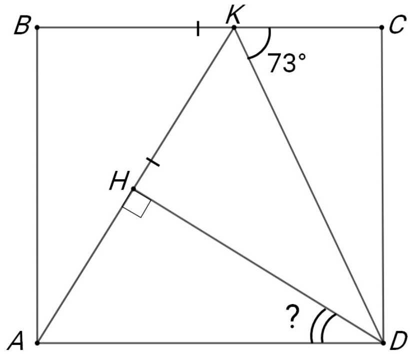
Ответ: 52.

Задача 8.3.2. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ отмечена точка K. Точка H на отрезке AK такова, что $\angle AHD = 90°$. Оказалось, что $AK = BC$. Сколько градусов составляет угол ADH, если $\angle CKD = 72°$?



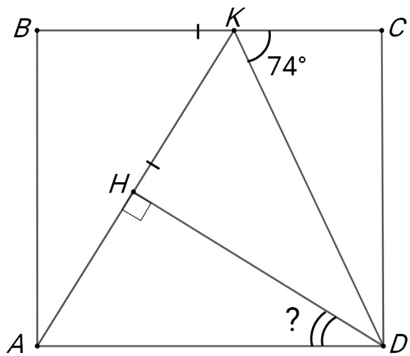
Ответ: 54.

Задача 8.3.3. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ отмечена точка K. Точка H на отрезке AK такова, что $\angle AHD = 90°$. Оказалось, что $AK = BC$. Сколько градусов составляет угол ADH, если $\angle CKD = 73°$?



Ответ: 56.

Задача 8.3.4. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ отмечена точка K. Точка H на отрезке AK такова, что $\angle AHD = 90°$. Оказалось, что $AK = BC$. Сколько градусов составляет угол ADH, если $\angle CKD = 74°$?



Ответ: 58.

Задача 8.4.1. По кругу стоят 36 детей, каждый из них одет в красную или синюю кофту. Известно, что рядом с каждым мальчиком стоит девочка, а рядом с каждой девочкой стоит человек в синей кофте. Найдите наибольшее возможное количество девочек в красных кофтах.

Ответ: 24.

Задача 8.4.2. По кругу стоят 39 детей, каждый из них одет в красную или синюю кофту. Известно, что рядом с каждым мальчиком стоит девочка, а рядом с каждой девочкой стоит человек в синей кофте. Найдите наибольшее возможное количество девочек в красных кофтах.

Ответ: 26.

Задача 8.4.3. По кругу стоят 27 детей, каждый из них одет в красную или синюю кофту. Известно, что рядом с каждым мальчиком стоит девочка, а рядом с каждой девочкой стоит человек в синей кофте. Найдите наибольшее возможное количество девочек в красных кофтах.

Ответ: 18.

Задача 8.4.4. По кругу стоят 48 детей, каждый из них одет в красную или синюю кофту. Известно, что рядом с каждым мальчиком стоит девочка, а рядом с каждой девочкой стоит человек в синей кофте. Найдите наибольшее возможное количество девочек в красных кофтах.

Ответ: 32.

Задача 8.5.1. Из города в деревню выехал автомобиль, одновременно с ним из деревни в город выехал велосипедист. Когда автомобиль и велосипедист встретились, автомобиль сразу же развернулся и поехал обратно в город. В итоге велосипедист приехал в город на 35 минут позже автомобиля. Сколько минут затратил велосипедист на весь путь, если известно, что его скорость в 4,5 раза меньше скорости автомобиля?

Ответ: 55.

Задача 8.5.2. Из города в деревню выехал автомобиль, одновременно с ним из деревни в город выехал велосипедист. Когда автомобиль и велосипедист встретились, автомобиль сразу же развернулся и поехал обратно в город. В итоге велосипедист приехал в город на 28 минут позже автомобиля. Сколько минут затратил велосипедист на весь путь, если известно, что его скорость в 4,5 раза меньше скорости автомобиля?

Ответ: 44.

Задача 8.5.3. Из города в деревню выехал автомобиль, одновременно с ним из деревни в город выехал велосипедист. Когда автомобиль и велосипедист встретились, автомобиль сразу же развернулся и поехал обратно в город. В итоге велосипедист приехал в город на 42 минут позже автомобиля. Сколько минут затратил велосипедист на весь путь, если известно, что его скорость в 4,5 раза меньше скорости автомобиля?

Ответ: 66.

Задача 8.5.4. Из города в деревню выехал автомобиль, одновременно с ним из деревни в город выехал велосипедист. Когда автомобиль и велосипедист встретились, автомобиль сразу же развернулся и поехал обратно в город. В итоге велосипедист приехал в город на 49 минут позже автомобиля. Сколько минут затратил велосипедист на весь путь, если известно, что его скорость в 4,5 раза меньше скорости автомобиля?

Ответ: 77.

Задача 8.6.1. Паша выписал в порядке возрастания все натуральные делители натурального числа k и их пронумеровал: первый, второй, ...

Паша заметил, что если шестой делитель умножить на тринадцатый делитель, то получится исходное число k.

Сколько натуральных делителей имеет число k?

Ответ: 18.

Задача 8.6.2. Паша выписал в порядке возрастания все натуральные делители натурального числа k и их пронумеровал: первый, второй, ...

Паша заметил, что если шестой делитель умножить на одиннадцатый делитель, то получится исходное число k.

Сколько натуральных делителей имеет число k?

Ответ: 16.

Задача 8.6.3. Паша выписал в порядке возрастания все натуральные делители натурального числа k и их пронумеровал: первый, второй, ...

Паша заметил, что если шестой делитель умножить на десятый делитель, то получится исходное число k.

Сколько натуральных делителей имеет число k?

Ответ: 15.

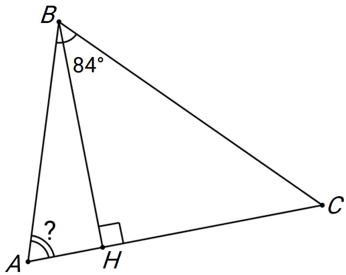
Задача 8.6.4. Паша выписал в порядке возрастания все натуральные делители натурального числа k и их пронумеровал: первый, второй, ...

Паша заметил, что если четвёртый делитель умножить на одиннадцатый делитель, то получится исходное число k.

Сколько натуральных делителей имеет число k?

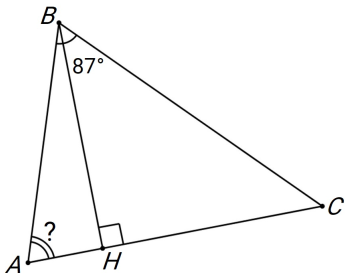
Ответ: 14.

Задача 8.7.1. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Оказалось, что $CH = AB + AH$. Сколько градусов составляет угол BAC, если $\angle ABC = 84°$?



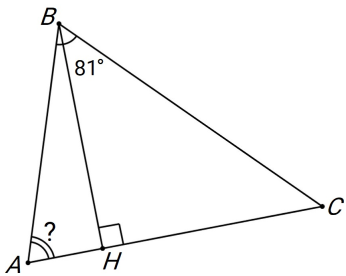
Ответ: 64.

Задача 8.7.2. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Оказалось, что $CH = AB + AH$. Сколько градусов составляет угол BAC, если $\angle ABC = 87°$?



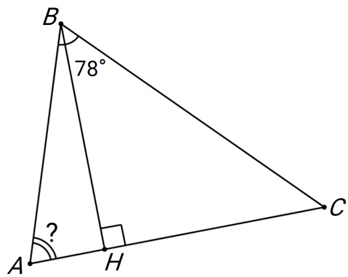
Ответ: 62.

Задача 8.7.3. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Оказалось, что $CH = AB + AH$. Сколько градусов составляет угол BAC, если $\angle ABC = 81°$?



Ответ: 66.

Задача 8.7.4. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Оказалось, что $CH = AB + AH$. Сколько градусов составляет угол BAC, если $\angle ABC = 78°$?



Ответ: 68.

Задача 8.8.1. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

Однажды собрались 10 жителей острова, все они надели на себя футболки с номерами от 1 до 10 (у разных жителей разные номера). Каждый из них сказал одну из фраз:

- «Среди собравшихся нет рыцаря, номер футболки которого больше моего»
- «Среди собравшихся нет лжеца, номер футболки которого меньше моего».

Известно, что каждая из этих фраз прозвучала ровно 5 раз. Сколько рыцарей могло быть среди этих 10 жителей? Укажите все возможные варианты.

Ответ: $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Задача 8.8.2. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

Однажды собрались 8 жителей острова, все они надели на себя футболки с номерами от 1 до 8 (у разных жителей разные номера). Каждый из них сказал одну из фраз:

- «Среди собравшихся нет рыцаря, номер футболки которого больше моего»
- «Среди собравшихся нет лжеца, номер футболки которого меньше моего».

Известно, что каждая из этих фраз прозвучала ровно 4 раза. Сколько рыцарей могло быть среди этих 8 жителей? Укажите все возможные варианты.

Ответ: $1, 2, 3, 4, 5$.

Задача 8.8.3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

Однажды собрались 12 жителей острова, все они надели на себя футболки с номерами от 1 до 12 (у разных жителей разные номера). Каждый из них сказал одну из фраз:

- «Среди собравшихся нет рыцаря, номер футболки которого больше моего»
- «Среди собравшихся нет лжеца, номер футболки которого меньше моего».

Известно, что каждая из этих фраз прозвучала ровно 6 раз. Сколько рыцарей могло быть среди этих 12 жителей? Укажите все возможные варианты.

Ответ: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

9 класс

Задача 9.1.1. В магазине продаётся 20 товаров, стоимости которых — различные натуральные числа от 1 до 20 рублей. Магазин решил устроить акцию: при покупке любых 5 товаров один из них выдаётся в подарок, причём покупатель сам выбирает, какой товар получит бесплатно. Влад хочет купить все 20 товаров в этом магазине, заплатив как можно меньше. Сколько рублей ему понадобится? (Каждый из 20 товаров продаётся в 1 экземпляре.)

Ответ: 136.

Задача 9.1.2. В магазине продаётся 20 товаров, стоимости которых — различные натуральные числа от 1 до 20 рублей. Магазин решил устроить акцию: при покупке любых 4 товаров один из них выдаётся в подарок, причём покупатель сам выбирает, какой товар получит бесплатно. Влад хочет купить все 20 товаров в этом магазине, заплатив как можно меньше. Сколько рублей ему понадобится? (Каждый из 20 товаров продаётся в 1 экземпляре.)

Ответ: 120.

Задача 9.1.3. В магазине продаётся 24 товара, стоимости которых — различные натуральные числа от 1 до 24 рублей. Магазин решил устроить акцию: при покупке любых 4 товаров один из них выдаётся в подарок, причём покупатель сам выбирает, какой товар получит бесплатно. Влад хочет купить все 24 товара в этом магазине, заплатив как можно меньше. Сколько рублей ему понадобится? (Каждый из 24 товаров продаётся в 1 экземпляре.)

Ответ: 171.

Задача 9.1.4. В магазине продаётся 25 товаров, стоимости которых — различные натуральные числа от 1 до 25 рублей. Магазин решил устроить акцию: при покупке любых

5 товаров один из них выдаётся в подарок, причём покупатель сам выбирает, какой товар получит бесплатно. Влад хочет купить все 25 товаров в этом магазине, заплатив как можно меньше. Сколько рублей ему понадобится? (Каждый из 25 товаров продаётся в 1 экземпляре.)

Ответ: 210.

Задача 9.2.1. Ваня загадал два натуральных числа, произведение которых равняется 7200. Какое наибольшее значение может принимать НОД этих чисел?

Ответ: 60.

Задача 9.2.2. Ваня загадал два натуральных числа, произведение которых равняется 28800. Какое наибольшее значение может принимать НОД этих чисел?

Ответ: 120.

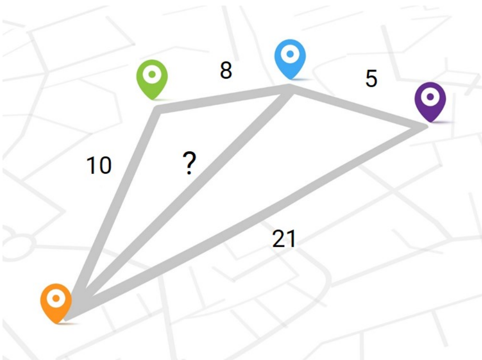
Задача 9.2.3. Ваня загадал два натуральных числа, произведение которых равняется 16200. Какое наибольшее значение может принимать НОД этих чисел?

Ответ: 90.

Задача 9.2.4. Ваня загадал два натуральных числа, произведение которых равняется 45000. Какое наибольшее значение может принимать НОД этих чисел?

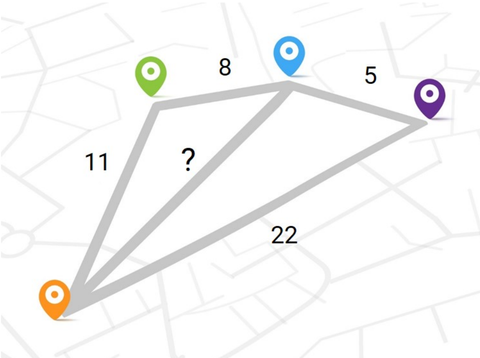
Ответ: 150.

Задача 9.3.1. Четыре города и пять дорог расположены так, как изображено на рисунке. Длины всех дорог равны целому числу километров. Длины четырёх дорог указаны на рисунке. Сколько километров составляет длина оставшейся?



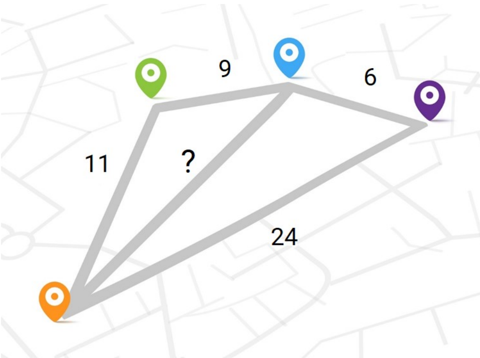
Ответ: 17.

Задача 9.3.2. Четыре города и пять дорог расположены так, как изображено на рисунке. Длины всех дорог равны целому числу километров. Длины четырёх дорог указаны на рисунке. Сколько километров составляет длина оставшейся?



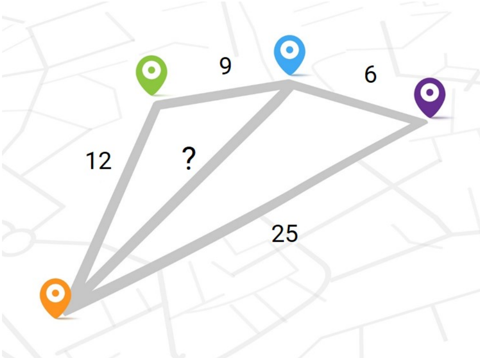
Ответ: 18.

Задача 9.3.3. Четыре города и пять дорог расположены так, как изображено на рисунке. Длины всех дорог равны целому числу километров. Длины четырёх дорог указаны на рисунке. Сколько километров составляет длина оставшейся?



Ответ: 19.

Задача 9.3.4. Четыре города и пять дорог расположены так, как изображено на рисунке. Длины всех дорог равны целому числу километров. Длины четырёх дорог указаны на рисунке. Сколько километров составляет длина оставшейся?



Ответ: 20.

Задача 9.4.1. Простое число p таково, что число $p + 25$ является седьмой степенью простого числа. Чему может быть равно p? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 103.

Задача 9.4.2. Простое число p таково, что число $p + 27$ является седьмой степенью простого числа. Чему может быть равно p? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 101.

Задача 9.4.3. Простое число p таково, что число $p + 21$ является седьмой степенью простого числа. Чему может быть равно p? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 107.

Задача 9.4.4. Простое число p таково, что число $p + 19$ является седьмой степенью простого числа. Чему может быть равно p? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 109.

Задача 9.5.1. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

Однажды собрались 80 жителей острова, все они надели на себя футболки с номерами от 1 до 80 (у разных жителей разные номера). Каждый из них сказал одну из двух фраз:

- «Среди собравшихся хотя бы у 5 лжецов номер футболки больше моего».
- «Среди собравшихся хотя бы у 5 лжецов номер футболки меньше моего».

Какое наименьшее количество рыцарей могло быть среди этих 80 жителей?

Ответ: 70.

Задача 9.5.2. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

Однажды собрались 90 жителей острова, все они надели на себя футболки с номерами от 1 до 90 (у разных жителей разные номера). Каждый из них сказал одну из двух фраз:

- «Среди собравшихся хотя бы у 5 лжецов номер футболки больше моего».
- «Среди собравшихся хотя бы у 5 лжецов номер футболки меньше моего».

Какое наименьшее количество рыцарей могло быть среди этих 90 жителей?

Ответ: 80.

Задача 9.5.3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

Однажды собрались 70 жителей острова, все они надели на себя футболки с номерами от 1 до 70 (у разных жителей разные номера). Каждый из них сказал одну из двух фраз:

- «Среди собравшихся хотя бы у 5 лжецов номер футболки больше моего».
- «Среди собравшихся хотя бы у 5 лжецов номер футболки меньше моего».

Какое наименьшее количество рыцарей могло быть среди этих 70 жителей?

Ответ: 60.

Задача 9.5.4. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

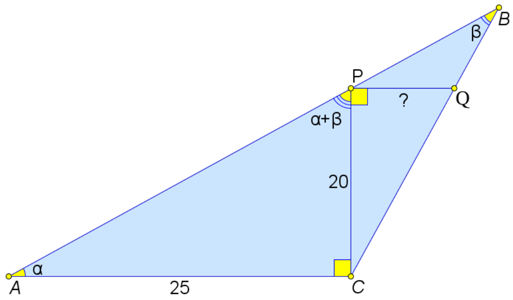
Однажды собрались 60 жителей острова, все они надели на себя футболки с номерами от 1 до 60 (у разных жителей разные номера). Каждый из них сказал одну из двух фраз:

- «Среди собравшихся хотя бы у 5 лжецов номер футболки больше моего».
- «Среди собравшихся хотя бы у 5 лжецов номер футболки меньше моего».

Какое наименьшее количество рыцарей могло быть среди этих 60 жителей?

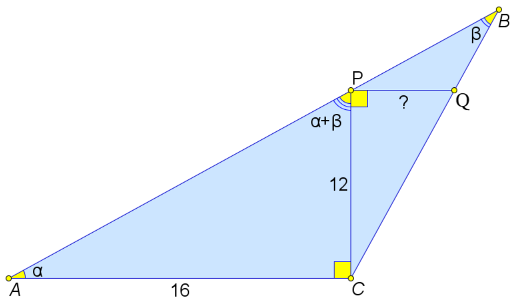
Ответ: 50.

Задача 9.6.1. Дан тупоугольный треугольник ABC с тупым углом C. На его сторонах AB и BC отмечены точки P и Q соответственно так, что $\angle ACP = CPQ = 90°$. Найдите длину отрезка PQ, если известно, что $AC = 25$, $CP = 20$, $\angle APC = \angle A + \angle B$.



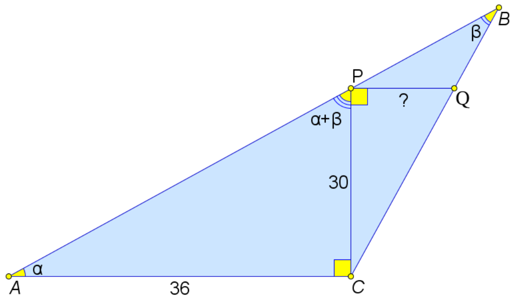
Ответ: 16.

Задача 9.6.2. Дан тупоугольный треугольник ABC с тупым углом C. На его сторонах AB и BC отмечены точки P и Q соответственно так, что $\angle ACP = CPQ = 90°$. Найдите длину отрезка PQ, если известно, что $AC = 16$, $CP = 12$, $\angle APC = \angle A + \angle B$.



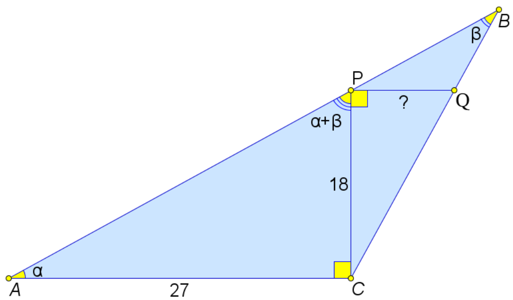
Ответ: 9.

Задача 9.6.3. Дан тупоугольный треугольник ABC с тупым углом C. На его сторонах AB и BC отмечены точки P и Q соответственно так, что $\angle ACP = CPQ = 90°$. Найдите длину отрезка PQ, если известно, что $AC = 36$, $CP = 30$, $\angle APC = \angle A + \angle B$.



Ответ: 25.

Задача 9.6.4. Дан тупоугольный треугольник ABC с тупым углом C. На его сторонах AB и BC отмечены точки P и Q соответственно так, что $\angle ACP = CPQ = 90°$. Найдите длину отрезка PQ, если известно, что $AC = 27$, $CP = 18$, $\angle APC = \angle A + \angle B$.



Ответ: 12.

Задача 9.7.1. Дан квадратный трёхчлен $P(x)$, старший коэффициент которого равен 1. На графике $y = P(x)$ отметили две точки с абсциссами 10 и 30. Оказалось, что биссектриса первой четверти координатной плоскости пересекает отрезок между ними в его середине. Найдите $P(20)$.

Ответ: -80.

Задача 9.7.2. Дан квадратный трёхчлен $P(x)$, старший коэффициент которого равен 1. На графике $y = P(x)$ отметили две точки с абсциссами 20 и 40. Оказалось, что биссектриса первой четверти координатной плоскости пересекает отрезок между ними в его середине. Найдите $P(30)$.

Ответ: -70.

Задача 9.7.3. Дан квадратный трёхчлен $P(x)$, старший коэффициент которого равен 1. На графике $y = P(x)$ отметили две точки с абсциссами 30 и 50. Оказалось, что биссектриса первой четверти координатной плоскости пересекает отрезок между ними в его середине. Найдите $P(40)$.

Ответ: -60.

Задача 9.7.4. Дан квадратный трёхчлен $P(x)$, старший коэффициент которого равен 1. На графике $y = P(x)$ отметили две точки с абсциссами 40 и 60. Оказалось, что биссектриса первой четверти координатной плоскости пересекает отрезок между ними в его середине. Найдите $P(50)$.

Ответ: -50.

Задача 9.8.1. В таблице 8×12 некоторые N клеток — чёрные, а остальные — белые. За одну операцию разрешается покрасить три клетки, образующие трёхклеточный уголок, в белый цвет (некоторые из них ещё до перекрашивания могли быть белыми). Оказалось, что таблицу невозможно сделать полностью белой менее чем за 25 таких операций. Найдите наименьшее возможное значение N.

Ответ: 27.

Задача 9.8.2. В таблице 8×10 некоторые N клеток — чёрные, а остальные — белые. За одну операцию разрешается покрасить три клетки, образующие трёхклеточный уголок, в белый цвет (некоторые из них ещё до перекрашивания могли быть белыми). Оказалось, что таблицу невозможно сделать полностью белой менее чем за 21 такую операцию. Найдите наименьшее возможное значение N.

Ответ: 23.

Задача 9.8.3. В таблице 8×14 некоторые N клеток — чёрные, а остальные — белые. За одну операцию разрешается покрасить три клетки, образующие трёхклеточный уголок, в белый цвет (некоторые из них ещё до перекрашивания могли быть белыми). Оказалось, что таблицу невозможно сделать полностью белой менее чем за 29 таких операций. Найдите наименьшее возможное значение N.

Ответ: 31.

Задача 9.8.4. В таблице 6×14 некоторые N клеток — чёрные, а остальные — белые. За одну операцию разрешается покрасить три клетки, образующие трёхклеточный уголок, в белый цвет (некоторые из них ещё до перекрашивания могли быть белыми). Оказалось, что таблицу невозможно сделать полностью белой менее чем за 22 такие операции. Найдите наименьшее возможное значение N.

Ответ: 24.

10 класс

Задача 10.1.1. Саша уже неделю смотрит все серии интересного сериала подряд. Вчера Саша посмотрел 9 серий, а сегодня всего 6. Оказалось, что сумма номеров всех серий, просмотренных вчера, равна сумме номеров всех серий, просмотренных сегодня. Какой номер имеет последняя просмотренная Сашей серия? (Серии нумеруются последовательными натуральными числами, начиная с 1.)

Ответ: 25.

Задача 10.1.2. Саша уже неделю смотрит все серии интересного сериала подряд. Вчера Саша посмотрел 9 серий, а сегодня всего 7. Оказалось, что сумма номеров всех серий, просмотренных вчера, равна сумме номеров всех серий, просмотренных сегодня. Какой номер имеет последняя просмотренная Сашей серия? (Серии нумеруются последовательными натуральными числами, начиная с 1.)

Ответ: 39.

Задача 10.1.3. Саша уже неделю смотрит все серии интересного сериала подряд. Вчера Саша посмотрел 10 серий, а сегодня всего 5. Оказалось, что сумма номеров всех серий, просмотренных вчера, равна сумме номеров всех серий, просмотренных сегодня. Какой номер имеет последняя просмотренная Сашей серия? (Серии нумеруются последовательными натуральными числами, начиная с 1.)

Ответ: 17.

Задача 10.2.1. В магазине продаются 15 видов шоколада. За неделю Андрей попробовал 6 видов, Борис — 11, а Денис — 13. Оказалось, что ни один вид шоколада не продегустировали все трое. Сколько видов шоколада попробовали и Андрей, и Борис?

Ответ: 2.

Задача 10.2.2. В магазине продаются 15 видов шоколада. За неделю Андрей попробовал 7 видов, Борис — 11, а Денис — 12. Оказалось, что ни один вид шоколада не продегустировали все трое. Сколько видов шоколада попробовали и Андрей, и Борис?

Ответ: 3.

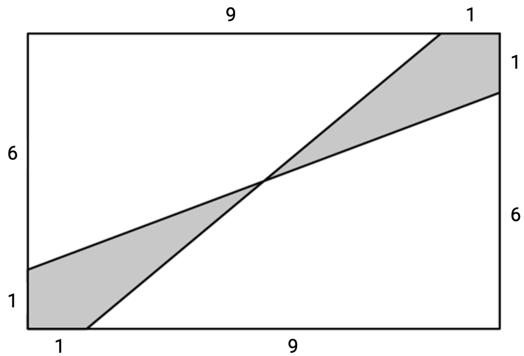
Задача 10.2.3. В магазине продаются 16 видов шоколада. За неделю Андрей попробовал 9 видов, Борис — 11, а Денис — 12. Оказалось, что ни один вид шоколада не продегустировали все трое. Сколько видов шоколада попробовали и Андрей, и Борис?

Ответ: 4.

Задача 10.2.4. В магазине продаются 15 видов шоколада. За неделю Андрей попробовал 7 видов, Борис — 10, а Денис — 13. Оказалось, что ни один вид шоколада не продегустировали все трое. Сколько видов шоколада попробовали и Андрей, и Денис?

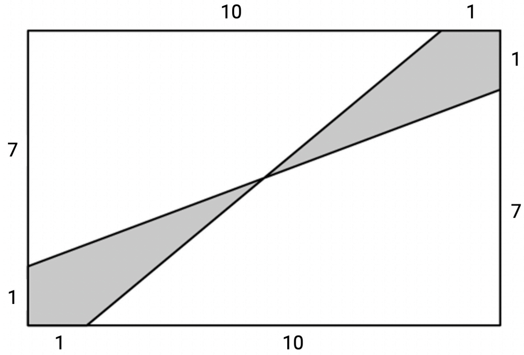
Ответ: 5.

Задача 10.3.1. Дан прямоугольник 7×10. Чему равна площадь закрашенной фигуры?



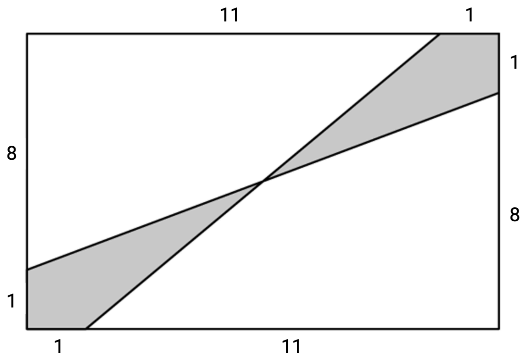
Ответ: 8,5.

Задача 10.3.2. Дан прямоугольник 8×11. Чему равна площадь закрашенной фигуры?



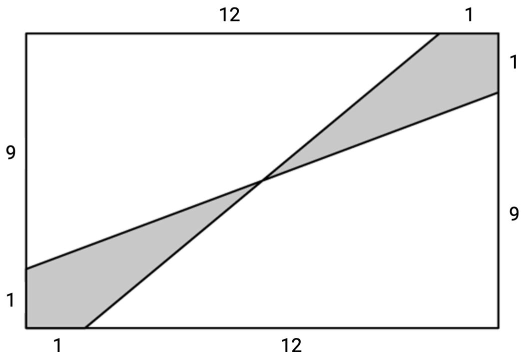
Ответ: 9,5.

Задача 10.3.3. Дан прямоугольник 9×12. Чему равна площадь закрашенной фигуры?



Ответ: 10,5.

Задача 10.3.4. Дан прямоугольник 10×13. Чему равна площадь, заштрихованная на картинке?



Ответ: 11,5.

Задача 10.4.1. В ряду чисел

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots, 201, 201, \ldots, 201$$

каждое число n встречается ровно n раз для всех $1 \leqslant n \leqslant 201$. Выберем в этом ряду такое число, слева и справа от которого чисел поровну. Определите это число.

Ответ: 142.

Задача 10.4.2. В ряду чисел

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots, 205, 205, \ldots, 205$$

каждое число n встречается ровно n раз для всех $1 \leqslant n \leqslant 205$. Выберем в этом ряду такое число, слева и справа от которого чисел поровну. Определите это число.

Ответ: 145.

Задача 10.4.3. В ряду чисел

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots, 209, 209, \ldots, 209$$

каждое число n встречается ровно n раз для всех $1 \leqslant n \leqslant 209$. Выберем в этом ряду такое число, слева и справа от которого чисел поровну. Определите это число.

Ответ: 148.

Задача 10.4.4. В ряду чисел

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots, 213, 213, \ldots, 213$$

каждое число n встречается ровно n раз для всех $1 \leqslant n \leqslant 213$. Выберем в этом ряду такое число, слева и справа от которого чисел поровну. Определите это число.

Ответ: 151.

Задача 10.5.1. Сумма трёх различных натуральных делителей нечётного натурального числа n равна 10327. Какое наименьшее значение может принимать n?

Ответ: 6735.

Задача 10.5.2. Сумма трёх различных натуральных делителей нечётного натурального числа n равна 10373. Какое наименьшее значение может принимать n?

Ответ: 6765.

Задача 10.5.3. Сумма трёх различных натуральных делителей нечётного натурального числа n равна 10281. Какое наименьшее значение может принимать n?

Ответ: 6705.

Задача 10.5.4. Сумма трёх различных натуральных делителей нечётного натурального числа n равна 10419. Какое наименьшее значение может принимать n?

Ответ: 6795.

Задача 10.6.1. На плоскости дана точка P. Какое наименьшее количество прямых, не проходящих через точку P, можно провести на плоскости так, чтобы любой луч с началом в точке P пересекал хотя бы 170 выбранных прямых?

Ответ: 341.

Задача 10.6.2. На плоскости дана точка P. Какое наименьшее количество прямых, не проходящих через точку P, можно провести на плоскости так, чтобы любой луч с началом в точке P пересекал хотя бы 160 выбранных прямых?

Ответ: 321.

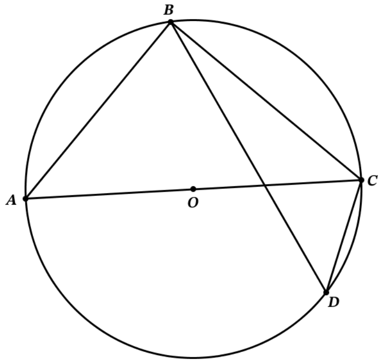
Задача 10.6.3. На плоскости дана точка P. Какое наименьшее количество прямых, не проходящих через точку P, можно провести на плоскости так, чтобы любой луч с началом в точке P пересекал хотя бы 180 выбранных прямых?

Ответ: 361.

Задача 10.6.4. На плоскости дана точка P. Какое наименьшее количество прямых, не проходящих через точку P, можно провести на плоскости так, чтобы любой луч с началом в точке P пересекал хотя бы 190 выбранных прямых?

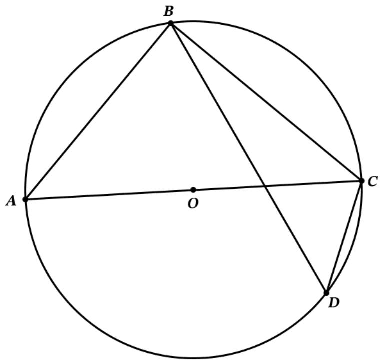
Ответ: 381.

Задача 10.7.1. На окружности ω по разные стороны от диаметра AC расположены точки B и D. Известно, что $AB = 3\sqrt{6}$, $CD = 3$, а площадь треугольника ABC в три раза больше площади треугольника BCD. Найдите радиус окружности ω.



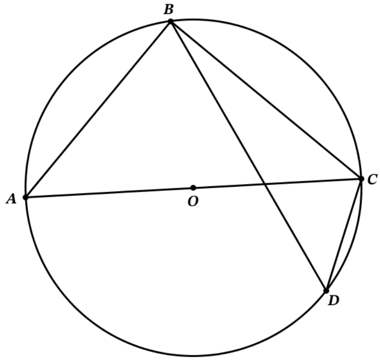
Ответ: 4,5.

Задача 10.7.2. На окружности ω по разные стороны от диаметра AC расположены точки B и D. Известно, что $AB = 5\sqrt{6}$, $CD = 5$, а площадь треугольника ABC в три раза больше площади треугольника BCD. Найдите радиус окружности ω.



Ответ: 7,5.

Задача 10.7.3. На окружности ω по разные стороны от диаметра AC расположены точки B и D. Известно, что $AB = 7\sqrt{6}$, $CD = 7$, а площадь треугольника ABC в три раза больше площади треугольника BCD. Найдите радиус окружности ω.



Ответ: 10,5.

Задача 10.8.1. Сколько существует троек натуральных чисел (a, b, c), удовлетворяющих равенству

$$\max(a, b) \cdot \max(c, 12) = \min(a, c) \cdot \min(b, 24)?$$

Здесь $\min(x, y)$ — это наименьшее из чисел x и y, а $\max(x, y)$ — наибольшее из чисел x и y.

Ответ: 455.

Задача 10.8.2. Сколько существует троек натуральных чисел (a, b, c), удовлетворяющих равенству

$$\max(a, b) \cdot \max(c, 11) = \min(a, c) \cdot \min(b, 22)?$$

Здесь $\min(x, y)$ — это наименьшее из чисел x и y, а $\max(x, y)$ — наибольшее из чисел x и y.

Ответ: 364.

Задача 10.8.3. Сколько существует троек натуральных чисел (a, b, c), удовлетворяющих равенству

$$\max(a, b) \cdot \max(c, 10) = \min(a, c) \cdot \min(b, 20)?$$

Здесь $\min(x, y)$ — это наименьшее из чисел x и y, а $\max(x, y)$ — наибольшее из чисел x и y.

Ответ: 286.

Задача 10.8.4. Сколько существует троек натуральных чисел (a, b, c), удовлетворяющих равенству

$$\max(a, b) \cdot \max(c, 13) = \min(a, c) \cdot \min(b, 26)?$$

Здесь $\min(x, y)$ — это наименьшее из чисел x и y, а $\max(x, y)$ — наибольшее из чисел x и y.

Ответ: 560.

11 класс

Задача 11.1.1. Маша живёт в квартире №290, которая находится в 4-м подъезде 17-этажного дома. На каком этаже живёт Маша? (Количество квартир одинаково во всех подъездах дома на всех 17 этажах; номера квартир начинаются с 1.)

Ответ: 7.

Задача 11.1.2. Маша живёт в квартире №285, которая находится в 4-м подъезде 17-этажного дома. На каком этаже живёт Маша? (Количество квартир одинаково во всех подъездах дома на всех 17 этажах; номера квартир начинаются с 1.)

Ответ: 6.

Задача 11.1.3. Маша живёт в квартире №295, которая находится в 4-м подъезде 17-этажного дома. На каком этаже живёт Маша? (Количество квартир одинаково во всех подъездах дома на всех 17 этажах; номера квартир начинаются с 1.)

Ответ: 8.

Задача 11.1.4. Маша живёт в квартире №280, которая находится в 4-м подъезде 17-этажного дома. На каком этаже живёт Маша? (Количество квартир одинаково во всех подъездах дома на всех 17 этажах; номера квартир начинаются с 1.)

Ответ: 5.

Задача 11.2.1. На столе лежат 30 монет: 23 десятирублёвых и 7 пятирублёвых, причём 20 из этих монет лежат вверх орлом, а остальные 10 — решкой. При каком наименьшем k среди произвольно выбранных k монет обязательно найдётся десятирублёвая монета, лежащая орлом вверх?

Ответ: 18.

Задача 11.2.2. На столе лежат 30 монет: 24 десятирублёвых и 6 пятирублёвых, причём 20 из этих монет лежат вверх орлом, а остальные 10 — решкой. При каком наименьшем k среди произвольно выбранных k монет обязательно найдётся десятирублёвая монета, лежащая орлом вверх?

Ответ: 17.

Задача 11.2.3. На столе лежат 30 монет: 24 десятирублёвых и 6 пятирублёвых, причём 21 из этих монет лежат вверх орлом, а остальные 9 — решкой. При каком наименьшем k среди произвольно выбранных k монет обязательно найдётся десятирублёвая монета, лежащая орлом вверх?

Ответ: 16.

Задача 11.2.4. На столе лежат 30 монет: 22 десятирублёвых и 8 пятирублёвых, причём 20 из этих монет лежат вверх орлом, а остальные 10 — решкой. При каком наименьшем k среди произвольно выбранных k монет обязательно найдётся десятирублёвая монета, лежащая орлом вверх?

Ответ: 19.

Задача 11.3.1. Произведение положительных чисел a и b равно 1. Известно, что

$$(3a + 2b)(3b + 2a) = 295.$$

Найдите $a + b$.

Ответ: 7.

Задача 11.3.2. Произведение положительных чисел a и b равно 1. Известно, что

$$(3a + 2b)(3b + 2a) = 217.$$

Найдите $a + b$.

Ответ: 6.

Задача 11.3.3. Произведение положительных чисел a и b равно 1. Известно, что

$$(3a + 2b)(3b + 2a) = 385.$$

Найдите $a + b$.

Ответ: 8.

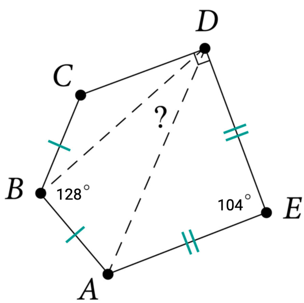
Задача 11.3.4. Произведение положительных чисел a и b равно 1. Известно, что

$$(3a + 2b)(3b + 2a) = 487.$$

Найдите $a + b$.

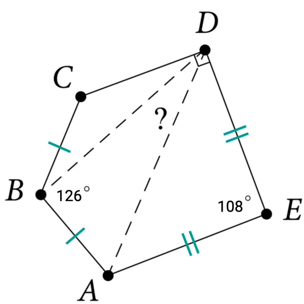
Ответ: 9.

Задача 11.4.1. Выпуклый пятиугольник $ABCDE$ таков, что $\angle ABC = 128°$, $\angle CDE = 90°$, $\angle AED = 104°$, $AB = BC$, $AE = ED$. Сколько градусов составляет угол ADB?



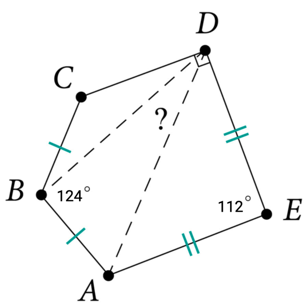
Ответ: 26.

Задача 11.4.2. Выпуклый пятиугольник $ABCDE$ таков, что $\angle ABC = 126°$, $\angle CDE = 90°$, $\angle AED = 108°$, $AB = BC$, $AE = ED$. Сколько градусов составляет угол ADB?



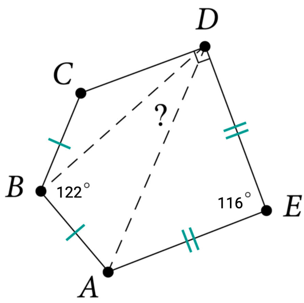
Ответ: 27.

Задача 11.4.3. Выпуклый пятиугольник $ABCDE$ таков, что $\angle ABC = 124°$, $\angle CDE = 90°$, $\angle AED = 112°$, $AB = BC$, $AE = ED$. Сколько градусов составляет угол ADB?



Ответ: 28.

Задача 11.4.4. Выпуклый пятиугольник $ABCDE$ таков, что $\angle ABC = 122°$, $\angle CDE = 90°$, $\angle AED = 116°$, $AB = BC$, $AE = ED$. Сколько градусов составляет угол ADB?



Ответ: 29.

Задача 11.5.1. При каком наименьшем натуральном n можно расставить числа от 1 до n по кругу так, чтобы каждое число было либо больше всех 40 следующих за ним по часовой стрелке, либо меньше всех 30 следующих за ним по часовой стрелке?

Ответ: 70.

Задача 11.5.2. При каком наименьшем натуральном n можно расставить числа от 1 до n по кругу так, чтобы каждое число было либо больше всех 40 следующих за ним по часовой стрелке, либо меньше всех 20 следующих за ним по часовой стрелке?

Ответ: 60.

Задача 11.5.3. При каком наименьшем натуральном n можно расставить числа от 1 до n по кругу так, чтобы каждое число было либо больше всех 50 следующих за ним по часовой стрелке, либо меньше всех 30 следующих за ним по часовой стрелке?

Ответ: 80.

Задача 11.5.4. При каком наименьшем натуральном n можно расставить числа от 1 до n по кругу так, чтобы каждое число было либо больше всех 50 следующих за ним по часовой стрелке, либо меньше всех 40 следующих за ним по часовой стрелке?

Ответ: 90.

Задача 11.6.1. У многочлена $P(x)$ все коэффициенты — целые неотрицательные числа. Известно, что $P(1) = 4$ и $P(5) = 152$. Чему равно $P(11)$?

Ответ: 1454.

Задача 11.6.2. У многочлена $P(x)$ все коэффициенты — целые неотрицательные числа. Известно, что $P(1) = 4$ и $P(5) = 152$. Чему равно $P(12)$?

Ответ: 1874.

Задача 11.6.3. У многочлена $P(x)$ все коэффициенты — целые неотрицательные числа. Известно, что $P(1) = 4$ и $P(5) = 152$. Чему равно $P(9)$?

Ответ: 812.

Задача 11.6.4. У многочлена $P(x)$ все коэффициенты — целые неотрицательные числа. Известно, что $P(1) = 4$ и $P(5) = 152$. Чему равно $P(8)$?

Ответ: 578.

Задача 11.7.1. Центры шести сфер радиуса 1 расположены в вершинах правильного шестиугольника со стороной 2. Эти сферы внутренним образом касаются большой сферы S с центром в центре шестиугольника. Сфера P касается шести сфер внешним образом и сферы S внутренним образом. Чему равен радиус сферы P?

Ответ: 1,5.

Задача 11.7.2. Центры шести сфер радиуса 3 расположены в вершинах правильного шестиугольника со стороной 6. Эти сферы внутренним образом касаются большой сферы S с центром в центре шестиугольника. Сфера P касается шести сфер внешним образом и сферы S внутренним образом. Чему равен радиус сферы P?

Ответ: 4,5.

Задача 11.8.1. В таблице 28×35 некоторые k клеток покрашены в красный цвет, ещё r — в розовый, а оставшиеся s — в синий. Известно, что

- $k \geqslant r \geqslant s$;
- у каждой граничной клетки есть хотя бы 2 соседа такого же цвета;
- у каждой неграничной клетки есть хотя бы 3 соседа такого же цвета.

Какое наименьшее значение может принимать величина $k - s$?

(Клетка называется граничной, если она примыкает к границе таблицы.)

Ответ: 28.

Задача 11.8.2. В таблице 29×35 некоторые k клеток покрашены в красный цвет, ещё r — в розовый, а оставшиеся s — в синий. Известно, что

- $k \geqslant r \geqslant s$;
- у каждой граничной клетки есть хотя бы 2 соседа такого же цвета;
- у каждой неграничной клетки есть хотя бы 3 соседа такого же цвета.

Какое наименьшее значение может принимать величина $k - s$?

(Клетка называется граничной, если она примыкает к границе таблицы.)

Ответ: 29.

Задача 11.8.3. В таблице 25×35 некоторые k клеток покрашены в красный цвет, ещё r — в розовый, а оставшиеся s — в синий. Известно, что

- $k \geqslant r \geqslant s$;
- у каждой граничной клетки есть хотя бы 2 соседа такого же цвета;
- у каждой неграничной клетки есть хотя бы 3 соседа такого же цвета.

Какое наименьшее значение может принимать величина $k - s$?

(Клетка называется граничной, если она примыкает к границе таблицы.)

Ответ: 25.

Задача 11.8.4. В таблице 26×35 некоторые k клеток покрашены в красный цвет, ещё r — в розовый, а оставшиеся s — в синий. Известно, что

- $k \geqslant r \geqslant s$;
- у каждой граничной клетки есть хотя бы 2 соседа такого же цвета;
- у каждой неграничной клетки есть хотя бы 3 соседа такого же цвета.

Какое наименьшее значение может принимать величина $k - s$?

(Клетка называется граничной, если она примыкает к границе таблицы.)

Ответ: 26.